



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

MARIA CAMILA GONZÁLEZ REINA

A distribuição Birnbaum-Saunders baseada na distribuição Normal Inversa Gaussiana

Campinas

2016

Maria Camila González Reina

A distribuição Birnbaum-Saunders baseada na distribuição Normal Inversa Gaussiana

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Estatística.

Orientador: Filidor Edilfonso Vilca Labra

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Maria Camila González Reina e orientada pelo Prof. Dr. Filidor Edilfonso Vilca Labra.

Campinas

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G589d González Reina, Maria Camila, 1991-
A distribuição Birnbaum-Saunders baseada na distribuição normal inversa gaussiana / Maria Camila González Reina. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Filidor Edilfonso Vilca Labra.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Birnbaum-Saunders, Distribuição de. 2. Distribuição gaussiana inversa.
3. Algoritmos de esperança-maximização. I. Vilca Labra, Filidor Edilfonso. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A Birnbaum-Saunders distribution based on the normal inverse gaussian distribution

Palavras-chave em inglês:

Birnbaum-Saunders distribution

Inverse gaussian distribution

Expectation-maximization algorithms

Área de concentração: Estatística

Titulação: Mestra em Estatística

Banca examinadora:

Filidor Edilfonso Vilca Labra [Orientador]

Mariana Rodrigues Motta

Heleno Bolfarine

Data de defesa: 30-06-2016

Programa de Pós-Graduação: Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 30 de junho de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). FILIDOR EDILFONSO VILCA LABRA

Prof(a). Dr(a). MARIANA RODRIGUES MOTTA

Prof(a). Dr(a). HELENO BOLFARINE

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

A meus grandes amores, meus pais Martha e Ignacio por seu amor incondicional, meus tios Teresa e Nestor pela ajuda incondicional e apoio e meu namorado Juan por sempre estar a meu lado....

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre guiar meus passos.

Agradeço a meus pais Martha e Ignacio por seu amor e força incondicional.

A meus tios Teresa e Nestor por o apoio financeiro, por seu amor de pais que sempre vou agradecer, porque para mim são meus pais também.

A meu namorado Juan pela ajuda e sempre estar comigo e dar força em todo momento.

A minha família por sempre me dar apoio e suas orações.

Ao meu orientador Prof. Dr. Filidor Edilfonso Vilca Labra, por sua ajuda nos momentos difíceis, pela sua paciência, seu apoio e sua confiança.

À Profa. Dra. Camila Borelli Zeller pela sua ajuda e principalmente contribuições importantes.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro durante a elaboração deste trabalho.

Aos membros da banca a Profa. Dra. Mariana Motta e Prof. Dr. Heleno Bolfarine pelas suas correções.

Aos professores do Departamento de Estadística pelos ensinamentos concebidos.

Resumo

A classe de modelos Birnbaum-Saunders surgiu na área de engenharia, em problemas de fadiga dos materiais. Mas, nos últimos anos este modelo tem sido aplicado em outras áreas, como por exemplo, em ciências da saúde, na área ambiental e florestal, em demográficas, na área atuarial e financeira, entre outras.

Neste trabalho apresentamos uma extensão da distribuição BS baseado na distribuição Normal Gaussiana inversa, que é uma distribuição assimétrica usada usualmente na área de finanças. A distribuição BS resultante é uma distribuição absolutamente contínua, e preserva a propriedade leptocúrtica da distribuição Normal Inversa Gaussiana.

Sob certas condições dos parâmetros da distribuição gaussiana inversa, algoritmos EM são desenvolvidos para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo. Os resultados obtidos são ilustrados com dados reais e simulados, mostrando as propriedades robustas do procedimento de estimação.

Palavras-chave: Distribuição Birnbaum-Saunders, distribuição Inversa Gaussiana, Algoritmo EM.

Abstract

The class Birnbaum-Saunders (BS) models arose in engineering in material fatigue problems. But in the last years this class of models have been applied in other areas, such as in health sciences, environmental, forestry, demography, actuarials and finances, among others.

In this paper we present an extension of the BS distribution based on the distribution Normal inverse Gaussian, which is an asymmetric distribution usually used in finance. The resulting BS distribution is an absolutely continuous distribution, and preserves the leptokurtic property of the Normal inverse Gaussian distribution.

Under certain conditions of the inverse Gaussian distribution parameters, EM algorithms are developed to obtain maximum likelihood estimates of the BS model parameters. We illustrated the model with real and simulated data and results reflected the robustness of the estimation procedure.

Keywords: Birnbaum-Saunders distribution, Inverse gaussian distribution, Expectation-maximization algorithms.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diferentes situações da curtose.	20
Figura 2 – fdp da distribuição IG para diferentes valores de δ e $\gamma = 1$	26
Figura 3 – fdp da distribuição IG para diferentes valores de γ e $\delta = 1$	26
Figura 4 – fdp da distribuição IG, com $U \sim (\eta, \eta)$ para diferentes valores de η	28
Figura 5 – fdp da distribuição IG, com $U \sim (\eta, \eta^2)$ para diferentes valores de η	30
Figura 6 – fdp da distribuição NIG para diferentes valores de δ e $\gamma = 1$	33
Figura 7 – fdp da distribuição NIG para diferentes valores de γ e $\delta = 1$	33
Figura 8 – fdp da distribuição $NIGS(0, 1; \eta, \eta)$ para diferentes valores de η	39
Figura 9 – fdp da distribuição $NIGS(0, 1; \eta, \eta^2)$ para diferentes valores de η	41
Figura 10 – fdp da distribuição BS com diferentes valores de α e $\beta = 1$	44
Figura 11 – fdp da distribuição BSIG para diferentes valores de α , com β, δ, γ fixos e iguais.	46
Figura 12 – fdp da distribuição BSIG para diferentes valores de δ , com α, β, γ fixos e iguais a 1.	46
Figura 13 – fdp da distribuição BSIG para diferentes valores de γ e com α, β e δ fixos e iguais a 1.	47
Figura 14 – fdp das distribuições $BS(\alpha, \beta)$ e $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$, para diferentes valores de α	52
Figura 15 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: RB das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 0.6$	80
Figura 16 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 0.6$	80
Figura 17 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: RB dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 3$	81
Figura 18 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 3$	81
Figura 19 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RB as estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 0.6$	85
Figura 20 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 0.6$	85
Figura 21 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RB das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 3$	86
Figura 22 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 3$	86
Figura 23 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: RB as estimativas dos parâmetros α , $\beta = 1$, $\omega = -2$ e $\eta = 0.6$	89

Figura 24 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: RB as estimativas dos parâmetros $\alpha, \beta = 1, \omega =$ -2 e $\eta = 0.6$	89
Figura 25 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RMSE das estimativas dos parâmetros $\alpha, \beta = 1,$ $\omega = -2$ e $\eta = 0.6$	90
Figura 26 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RMSE das estimativas dos parâmetros $\alpha, \beta = 1,$ $\omega = -2$ e $\eta = 0.6$	90
Figura 27 – Histograma da variável nível de ozônio.	109
Figura 28 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG	111
Figura 29 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.	111
Figura 30 – Histograma dos dados da vida de fátiga.	112
Figura 31 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.	114
Figura 32 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.	114
Figura 33 – Histograma dos dados da vida de fátiga.	115
Figura 34 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.	116
Figura 35 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.	116

Lista de tabelas

Tabela 1	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$ e $\beta = 1$	77
Tabela 2	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$ e $\beta = 1$	77
Tabela 3	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$ e $\beta = 1$	78
Tabela 4	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1.5$ e $\beta = 1$	78
Tabela 5	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 2$ e $\beta = 1$	79
Tabela 6	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 3$ e $\beta = 1$	79
Tabela 7	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$ e $\beta = 1$. . .	82
Tabela 8	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$ e $\beta = 1$. . .	82
Tabela 9	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$ e $\beta = 1$. . .	83
Tabela 10	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1.5$ e $\beta = 1$. . .	83
Tabela 11	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 2$ e $\beta = 1$. . .	84
Tabela 12	– $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 3$ e $\beta = 1$. . .	84
Tabela 13	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$	87
Tabela 14	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$	88
Tabela 15	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$	91
Tabela 16	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$	92
Tabela 17	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$	93
Tabela 18	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$	94
Tabela 19	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$	95
Tabela 20	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$	96
Tabela 21	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$	97
Tabela 22	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$	98
Tabela 23	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$	99
Tabela 24	– $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$	100

Tabela 25 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.	101
Tabela 26 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.	102
Tabela 27 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.	103
Tabela 28 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.	104
Tabela 29 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.	105
Tabela 30 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.	106
Tabela 31 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.	107
Tabela 32 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.	108
Tabela 33 – Estatística descritiva	109
Tabela 34 – EMV dos parâmetros e respectivos erros padrão	110
Tabela 35 – Intervalos de Confiança do 95% dos EMV	110
Tabela 36 – Alguns critérios de informação	110
Tabela 37 – Estatística descritiva	112
Tabela 38 – EMV dos parâmetros e seus erros padrão	113
Tabela 39 – Intervalos de Confiança do 95% dos EMV	113
Tabela 40 – Alguns critérios de informação	113
Tabela 41 – EMV dos parâmetros e seus erros padrões	115
Tabela 42 – Intervalos de Confiança do 95% dos EMV	115
Tabela 43 – Alguns critérios de informação	116
Tabela 44 – Medidas diárias do nível de ozônio em Nova York, nos meses de Maio-Setembro 1973	131
Tabela 45 – Vida de fadiga representada por ciclos ($\times 10^{-3}$) até a falha de espécimes de alumínio do tipo 6061 – $T6$.	131

Lista de abreviaturas e siglas

BS	Distribuição Birnbaum-Saunders
IG	Distribuição Inversa Gaussiana
NIG	Distribuição Normal Inversa Gaussiana
NIGS	Distribuição Normal Inversa Gaussiana Simétrica
GIG	Distribuição Inversa Gaussiana Generalizada
BSIG	Distribuição Birnbaum-Saunders Normal Inversa Gaussiana
fda	Função de distribuição acumulada
fdp	Função de densidade de probabilidade

Sumário

	Introdução	17
0.1	A distribuição Birnbaum-Saunders	17
0.2	Inversa Gaussiana e Normal Inversa Gaussiana	19
0.3	Objetivos do trabalho	20
1	DISTRIBUIÇÃO NORMAL INVERSA GAUSSIANA	22
1.1	Introdução	22
1.2	Distribuição Inversa Gaussiana	22
1.2.1	Função de densidade caso geral	22
1.2.2	Propriedades	24
1.2.2.1	Gráficos de densidade $IG(\delta, \gamma)$.	25
1.2.3	Função de densidade caso $\delta = \gamma = \eta$	27
1.2.4	Propriedades	27
1.2.4.1	Gráficos de densidade $IG(\eta, \eta)$.	28
1.2.5	Função de densidade caso $\delta = \eta, \gamma = \eta^2$	28
1.2.6	Propriedades	29
1.2.6.1	Gráficos de densidade $IG(\eta, \eta^2)$.	29
1.3	Distribuição Normal Inversa Gaussiana	30
1.3.1	Função de densidade caso geral	30
1.3.2	Propriedades	31
1.3.3	Função de densidade para o caso simétrico	32
1.4	Algoritmo EM na distribuição NIG	34
1.4.1	Algoritmo EM quando $U \sim IG(\delta, \gamma)$	34
1.4.2	Algoritmo EM quando $U \sim IG(\eta, \eta)$	36
1.4.3	Algoritmo EM quando $U \sim IG(\eta, \eta^2)$	38
1.5	Comentários Finais do Capítulo	41
2	A DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM SAUNDERS BASEADA NA DISTRIBUIÇÃO INVERSA GAUSSIANA	42
2.1	Distribuição Birnbaum Saunders	42
2.1.1	Função de densidade	42
2.2	Distribuição Birnbaum-Saunders Normal Inversa Gaussiana: Caso simétrico	44
2.2.0.1	Gráficos de densidade	45
2.2.1	Propriedades da Distribuição BSIG.	46

2.3	Distribuição Birnbaum-Saunders Normal Inversa Gaussiana: Caso assimétrico	48
2.3.0.1	Gráficos de densidade	50
2.3.1	Propriedades da Distribuição BSIG	50
2.3.2	Distribuição de vida associada com o modelo BSIG	54
2.4	Algoritmo EM	57
2.4.1	Caso simétrico	57
2.4.2	Caso assimétrico	60
2.4.3	Caso $U \sim IG(\eta, \eta)$	62
2.4.4	Caso $U \sim IG(\eta, \eta^2)$	64
2.4.5	Valores iniciais	67
2.5	Matriz de Informação Observada	68
2.5.1	Caso Simétrico	68
2.5.2	Caso Assimétrico	69
2.5.3	Caso $U \sim IG(\eta, \eta)$	71
2.5.4	Caso $U \sim IG(\eta, \eta^2)$	73
2.6	Comentários Finais do Capítulo	75
3	ESTUDO DE SIMULAÇÃO E APLICAÇÃO	76
3.1	Estudo de Simulação	76
3.1.1	Caso simétrico	77
3.1.2	Caso assimétrico	87
3.2	Aplicação 1	109
3.3	Aplicação 2	112
3.3.1	Caso simétrico	113
3.3.2	Caso assimétrico	114
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	118
	REFERÊNCIAS	119
	APÊNDICES	123
	APÊNDICE A – DERIVADAS DA MATRIZ DE INFORMAÇÃO OBSERVADA	124
A.0.1	Caso simétrico	125
A.0.2	Caso assimétrico	126
A.0.3	Caso $U \sim (\eta, \eta)$	127
A.0.4	Caso $U \sim (\eta, \eta^2)$	128

	ANEXOS	130
	ANEXO A – CONJUNTO DE DADOS REAIS	131
A.1	Aplicação 1	131
A.2	Aplicação 2	131

Introdução

0.1 A distribuição Birnbaum-Saunders

Um dos grandes problemas na área da indústria é quando se produz a ruptura ou falha dos materiais. Estas falhas são devidas a diversos fatores como por exemplo, a fadiga dos materiais, esta fadiga é uma falha da redução na resistência do material devido ao uso contínuo. Diferentes distribuições tem sido usadas para a modelagem do tempo de vida, alguns exemplos são as distribuições gama, gama inversa, log-normal e weibull. No entanto estas distribuições não são muito úteis quando o interesse se encontra na possível existência de dado atípicos, como por exemplo tempos de fadiga muito altos. Visando encontrar uma alternativa a estes problemas, [Birnbaum e Saunders \(1969a\)](#) derivaram uma nova família de distribuições de tempo de vida de materiais e equipamentos submetidos a cargas dinâmicas.

[Birnbaum e Saunders \(1969b\)](#) propuseram algumas suposições sobre o processo de fadiga, as quais são apresentadas a seguir, veja [Neto \(2010\)](#) e [Ramos \(2015\)](#)

- Um material é submetido a um padrão cíclico de tensão e força;
- A falha do material ocorre quando o tamanho da fissura excede certo nível de resistência;
- A sequência de tensão imposta ao material é a constante de ciclo para ciclo;
- Um ciclo é definido como m oscilações e cada aplicação da i -ésima oscilação em um ciclo resulta em uma extensão aleatória da rachadura X_i . A distribuição desta variável aleatória só dependerá da rachadura atual causada pela oscilação de carga neste ciclo;
- A extensão da rachadura devido ao j -ésimo ciclo é

$$Y_j = \sum_{i=1}^m X_i,$$

onde Y_j é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída com media μ e variância σ^2 , para todo $j = 1, 2, \dots$. Desta forma pode-se expressar a extensão total da rachadura, após n ciclos, pela seguinte variável aleatória,

$$W_n = \sum_{j=1}^n Y_j,$$

com a função de distribuição acumulada (fda),

$$H_n(w) = P(W_n \leq w) \quad n = 1, 2, \dots$$

Seja N o número de ciclos requeridos até observar a falha, onde tal falha ocorre quando o comprimento da rachadura dominante excede o comprimento crítico w . Assim, a função de distribuição da variável aleatória N é dada por,

$$P(N \leq n) = P\left(\sum_{j=1}^n Y_j > w\right) = 1 - H_n(w).$$

Mediante o Teorema Central do Limite e supondo que os Y_j 's são independentes e identicamente distribuídos, a fda de N pode ser expressa de forma aproximada como, vide [Ramos \(2015\)](#),

$$\begin{aligned} P(N \leq n) &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{w - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{w}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &\cong 1 - \Phi\left(\frac{w}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{w}{\sigma\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

em que $\Phi(\cdot)$ representa a fda da normal padrão.

Segundo [Birnbaum e Saunders \(1969b\)](#), é possível substituir N por uma variável aleatória real não negativa T , tal que T representa o tempo total até a ocorrência de falha. Neste caso temos que fda de T é dada por

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right), \quad t > 0, \end{aligned}$$

em que $\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu w}} > 0$ e $\beta = \frac{w}{\mu} > 0$. Esta distribuição é denotada por $T \sim BS(\alpha, \beta)$, onde α é o parâmetro de forma e β é um parâmetro de escala.

A distribuição Birnbaum-Saunders (BS), às vezes referida como distribuição de tempo de vida, tem sido aplicada em diversas áreas além da modelagem de processos de fadiga, como por exemplo: negócios, análise de sobrevivência, ciências ambientais, ciências médicas, agricultura. Vide [Leiva et al. \(2007\)](#), [Leiva et al. \(2008\)](#), [Barros, Paula e Leiva \(2008\)](#) e [Gilberto et al. \(2012\)](#).

É possível encontrar na literatura vários trabalhos nos quais a distribuição BS é implementada. Tais como, [Man, Schafer e Singpurwalla \(1974\)](#) eles mostraram que a densidade da BS é unimodal. [Birnbaum e Saunders \(1969a\)](#) obtiveram originalmente os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros do modelo, [Engelhardt, Bain e Wright \(1981\)](#) propuseram intervalos de confiança e teste de hipótese para os parâmetros da distribuição, [Ng, Kundu e Balakrishnan \(2003\)](#) obtiveram estimadores através do método de momentos modificado, [Wang, Desmond e Lu \(2006\)](#) exploraram uma estimativa de momentos modificado censurado. Também tem sido aplicada em empresas e meio ambiente, autores tais como [Leiva et al. \(2007\)](#), [Leiva et al. \(2008\)](#) e [Barros, Paula e Leiva \(2008\)](#); na área dos negócios [Gilberto et al. \(2012\)](#) propuseram o uso de modelagem estatística robusta baseada nos modelos BS, entre muito outros.

0.2 Inversa Gaussiana e Normal Inversa Gaussiana

A distribuição inversa gaussiana foi proposta por [Schrödinger \(1915\)](#), ali foi obtida a função de densidade de probabilidade (fdp) para o tempo da primeira passagem em Movimento Browniano (Brownian Motion) com tendência positiva. O modelo gaussiano inverso tem sido usado como uma distribuição de tempo de vida, vide [Chhikara e Folks \(1977\)](#). [Bhattacharyya e Fries \(1982\)](#) notaram que a distribuição inversa gaussiana podia ser usada para modelar tempos de falha por fadiga. Os primeiros estudos detalhados da distribuição inversa gaussiana foram apresentados nos trabalhos de [Tweedie \(1957\)](#) e [Tweedie et al. \(1957\)](#), onde estabeleceram propriedades estatísticas importantes. Na literatura é também possível encontrar referências a esta distribuição sob o nome de distribuição de Wald, uma vez que [Wald \(1973\)](#) obteve a mesma densidade.

A distribuição normal inversa gaussiana é uma mistura da distribuição normal com a distribuição inversa gaussiana. Esta distribuição é usada para a construção de processos estocásticos de interesse na modelagem estatística nas áreas de finanças, vide [Barndorff-Nielsen \(1997\)](#), [Barndorff-Nielsen \(1998\)](#), [Rydborg \(1966ab\)](#), [Rydborg \(1966aa\)](#), entre outros.

Em situações extremas de mercado o uso da distribuição normal não é apropriada, já que a distribuição dos retornos tem distribuição leptocúrtica e assimétrica. Análises descritas mostram que as curtoses são superiores aos encontrados em uma distribuição normal. As distribuições leptocúrticas têm a característica de serem mais altas (concentradas), e possuem caldas mais pesadas do que a distribuição normal. Na Figura 1 apresenta diferentes situações da curtose.

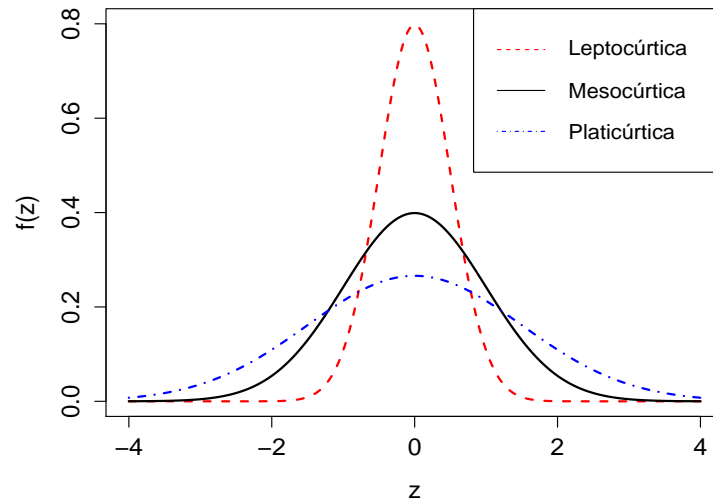


Figura 1 – Diferentes situações da curtose.

O quarto momento central de uma distribuição é uma medida de que tão concentrado é a distribuição de probabilidade, o qual é conhecido como curtose. Para o quarto momento é preferível utilizar o momento padronizado, como uma medida relativa da curtose. Desta forma se o quarto momento padronizado é maior que 3, a distribuição de probabilidade apresenta um ponto mais elevado e recebe o nome de leptocúrtica. Se o quarto momento padronizado é menor que 3, a distribuição de probabilidade é relativamente baixa ou achatada, recebe o nome de platicúrtica. E por último, se o quarto momento padronizado é igual a 3, é dizer, a distribuição não apresenta uma maior ou menos concentração do que a distribuição normal padrão, se diz que a distribuição é mesocúrtica, para mais detalhes veja [Canavos \(1984\)](#).

0.3 Objetivos do trabalho

O principal objetivo é apresentar extensões da distribuição birnbaum–saunders (BS). Em lugar da distribuição normal, usualmente adotada, aqui usamos a distribuição normal inversa gaussiana. Estudamos algumas propriedades da distribuição proposta. Além disso, estudamos alguns aspectos de estimação baseado no método de máxima verossimilhança. Os objetivos específicos pode ser resumidos como segue:

- 1) Descrever a extensão da distribuição birnbaum–saunders (BS) baseado na distribuição normal inversa gaussiana, que é usada no lugar das distribuição normal.
- 2) A estimação de máxima verossimilhança é baseada no algoritmo EM. Neste trabalho, os parâmetros da inversa gaussiana (ou normal inversa gaussiana) são considerado

desconhecidos, e são estimados também via o algoritmo EM;

- 3) Exemplos numéricos, baseado em dados reais e simulados, são apresentados para ilustrar a metodologia.

1 Distribuição Normal Inversa Gaussiana

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a distribuição normal inversa gaussiana (NIG) como definida por [Barndorff-Nielsen \(1997\)](#). Também estudamos a distribuição inversa gaussiana (IG) junto com algumas de suas propriedades, vide [Schrödinger \(1915\)](#), [Chhikara e Folks \(1977\)](#), entre outros. Para a estimação dos parâmetros na distribuição NIG consideramos o algoritmo expectation-maximization (EM), ver [Dempster, Laird e Rubin \(1977\)](#).

1.2 Distribuição Inversa Gaussiana

A distribuição inversa gaussiana foi proposta pela primeira vez por [Schrödinger \(1915\)](#). Na literatura é possível encontrar diferentes aplicações da distribuição inversa gaussiana, por exemplo, [Chhikara e Folks \(1977\)](#) utilizaram o modelo gaussiano inverso na modelagem dos tempos de vida. Em [Chhikara e Folks \(1977\)](#) são também desenvolvidos algumas das principais propriedades desta distribuição. Uma discussão mais detalhada desta distribuição, suas propriedades e aplicações ver [Chhikara e Folks \(1989b\)](#).

Nesta seção apresentaremos diferentes parametrizações da distribuição inversa gaussiana, a primeira forma é a distribuição inversa gaussiana no caso geral, seguida da distribuição no caso em que os dois parâmetros são iguais e por último em que o segundo parâmetro é o quadrado do primeiro. Para cada um destes casos apresentaremos seus respectivas funções de densidade, propriedades e diferentes gráficas.

1.2.1 Função de densidade caso geral

Na literatura é possível encontrar diferentes parametrizações da distribuição inversa gaussiana (e.g. [Tweedie \(1957\)](#) e [Tweedie et al. \(1957\)](#)). No decorrer deste trabalho diremos que uma variável aleatória U segue uma distribuição IG de parâmetros δ e γ se sua função de densidade de probabilidade (fdp) é a seguinte

$$h(u; \delta, \gamma) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \exp(\delta\gamma) u^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{u} + \gamma^2 u \right) \right\}, \quad u > 0, \quad (1.1)$$

em que $\delta > 0$ e $\gamma > 0$. Usar-se-à notação $U \sim IG(\delta, \gamma)$.

A função de distribuição acumulada (fda) de U pode ser representada da seguinte forma

$$F(u; \delta, \gamma) = \Phi \left[\left(\frac{u}{\delta^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{u\gamma - \delta}{\delta} \right) \right] + \exp(2\gamma\delta) \Phi \left[\left(\frac{u}{\delta\gamma} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{u\gamma + \delta}{\delta} \right) \right], \quad u > 0, \quad (1.2)$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a fda da distribuição normal padrão. Para mais detalhes, veja [Shuster \(1968\)](#) e [Chhikara e Folks \(1974\)](#).

É possível obter a fdp dada em (1.1) a partir de uma classe mais geral de distribuições, conhecida na literatura como distribuição inversa gaussiana generalizada (GIG), veja [Jorgensen \(1982\)](#). Diremos que a variável aleatória positiva U tem uma distribuição gaussiana inversa generalizada com parâmetros λ , δ e γ , se sua fdp dada por

$$h_{gig}(u; \lambda, \delta, \gamma) = \left(\frac{\gamma}{\delta} \right)^\lambda \frac{1}{2K_\lambda(\delta\gamma)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\delta^2 u^{-1} + \gamma^2 u) \right\}, \quad u > 0, \quad (1.3)$$

com $-\infty < \lambda < \infty$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$. Aqui $K_\lambda(\cdot)$ denota a função de Bessel modificada do terceiro tipo com índice λ , vide [Kreh \(2012\)](#). A notação usada para esta distribuição é $U \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$. Uma das características mais importantes da distribuição inversa gaussiana generalizada é sua flexibilidade no sentido de ter como casos particulares varias distribuições de probabilidade, vide [Ramos \(2015\)](#). Em (1.3) se

- $\delta = 0$, $\gamma > 0$ e $\lambda > 0$, então $U \sim \text{gamma}(\gamma, \delta)$;
- $\delta > 0$, $\gamma = 0$ e $\lambda < 0$, então $U \sim \text{gamma} - \text{inversa}(\delta, \lambda)$;
- $\delta > 0$, $\gamma > 0$ e $\lambda = -1/2$, então $U \sim IG(\delta, \gamma)$;

A seguir apresentamos alguns resultados referentes a distribuição inversa gaussiana generalizada. Detalhes das provas dos seguintes resultados podem ser encontrados em [Jorgensen \(1982\)](#).

Teorema 1.2.1. *Se $U \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$, então os momentos de ordem r tem a seguinte expressão*

$$v_r = E[U^r] = \frac{K_{r+\lambda}(\gamma\delta)}{K_\lambda(\gamma\delta)} \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Em particular, os momentos de ordem r para $U \sim IG(\delta, \gamma)$ podem ser obtidos do teorema anterior substituindo $\lambda = -\frac{1}{2}$. Isto é

$$v_r = E[U^r] = \frac{K_{r-1/2}(\gamma\delta)}{K_{-1/2}(\gamma\delta)} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^r, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

É possível observar dos anteriores resultados a importância da função de Bessel de terceiro tipo modificada, é por este motivo que faremos um breve resumo desta função. A função Bessel de terceiro tipo modificada com índice $\lambda \in \mathbb{R}$, $K_\lambda(\cdot)$, pode ser representada por

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp \left\{ -\frac{x}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) \right\} dy. \quad (1.5)$$

A seguir apresentamos algumas propriedades da função $K_\lambda(\cdot)$, que serão usados do decorrer deste trabalho

- $K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x)$;
- $K_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x} K_\lambda(x) + K_{\lambda-1}(x)$;
- $\frac{d}{dx} K_\lambda(x) = -\frac{1}{2}(K_{\lambda-1}(x) + K_{\lambda+1}(x))$;
- $K_{r+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \sum_{i=1}^r \frac{(r+1)!}{(r-1)!i!} (2x)^{-i} \right]$, se $\lambda = r + \frac{1}{2}$ e $r = 0, 1, 2, \dots$;
- Em casos de limite tem-se,

Quando $x \rightarrow 0$,

$$\sqrt{k_\lambda(x)} \simeq \frac{1}{2} \Gamma(\lambda) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda}; \text{ se } \lambda \geq 0,$$

$$\sqrt{k_\lambda(x)} \simeq \frac{1}{2} \Gamma(-\lambda) \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda; \text{ se } \lambda < 0,$$

$$\sqrt{K_0(x)} \simeq -\ln(x).$$

Quando $x \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{K_\lambda(x)} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x},$$

1.2.2 Propriedades

A seguir vamos apresentar algumas propriedades da distribuição inversa gaussiana. A prova destes resultados pode ser encontrada nos trabalhos de [Johnson e Kotz \(1970\)](#) e [Chhikara e Folks \(1989a\)](#).

Teorema 1.2.2. *Seja $U \sim IG(\delta, \gamma)$. Então*

$$\begin{aligned} \text{A média é: } E(U) &= \frac{\delta}{\gamma}, \\ \text{A variância é: } Var(U) &= \frac{\delta}{\gamma^3}, \\ \text{A moda é: } Mo(U) &= -\frac{3}{2\gamma^2} + \frac{\delta}{\gamma} \left(1 + \frac{9}{4(\delta\gamma)^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Teorema 1.2.3. *i) Seja $U \sim IG(\delta, \gamma)$. Então*

$$\frac{\gamma^2(U - \frac{\delta}{\gamma})^2}{U} \sim \chi_{(1)}^2;$$

ii) Sejam $U \sim IG(\delta, \gamma)$ e c uma constante positiva. Então

$$cU \sim IG\left(\delta\sqrt{c}, \frac{\gamma}{\sqrt{c}}\right);$$

iii) Sejam $U \sim IG(\delta, \gamma)$ e $V = (\gamma/\delta^2)^{\frac{2}{3}}U$. Então $V \sim IG(\eta, \eta^2)$ com $\eta = (\gamma\delta)^{1/3}$.

O resultado em *iii)* do Teorema 1.2.3 permite reduzir o número de parâmetros na distribuição inversa gaussiana. Desta forma vamos ter uma distribuição inversa gaussiana dependendo apenas do parâmetro η . Esta parametrização é útil no momento do desenvolvimento do algoritmo EM.

A seguir apresentamos algumas figuras da fdp da distribuição $IG(\delta, \gamma)$ para diferentes valores dos parâmetros.

1.2.2.1 Gráficos de densidade $IG(\delta, \gamma)$.

Na Figura 2, se apresenta as densidades da distribuição inversa gaussiana para os parâmetros $\delta = 0.5, 0.7, 1, 1.5$ e $\gamma = 1$, pode-se observar com para valores pequenos de δ a distribuição inversa gaussiana é mais concentrada em torno ao 0 e possui caudas mais leves. Podemos considerar que a distribuição inversa gaussiana para valores pequenos de δ é uma densidade leptocúrtica. Na Figura 3, se apresenta a função de densidade da distribuição inversa gaussiana para os parâmetros $\delta = 1$ e $\gamma = 0.5, 0.7, 1, 1.5$, neste caso podemos observar como para valores pequenos do parâmetro γ a distribuição inversa gaussiana possui caudas mais pesadas comparada com aquelas obtidas para valores altos de γ . Pode-se observar que se o valor do parâmetro γ é grande a densidade é leptocúrtica.

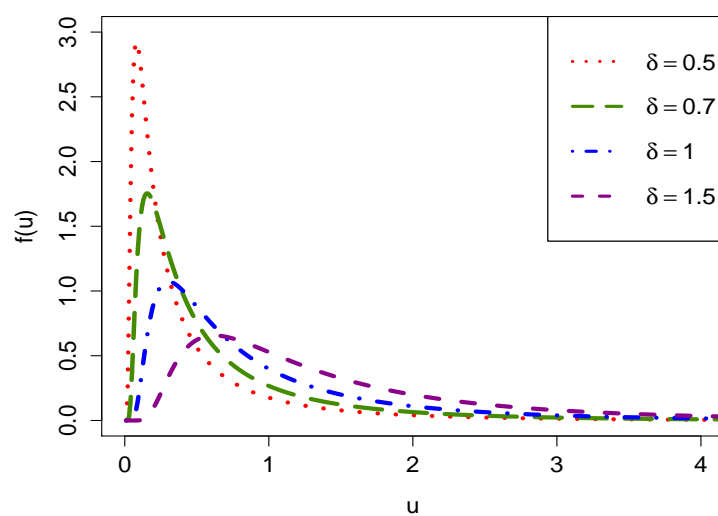


Figura 2 – fdp da distribuição IG para diferentes valores de δ e $\gamma = 1$.

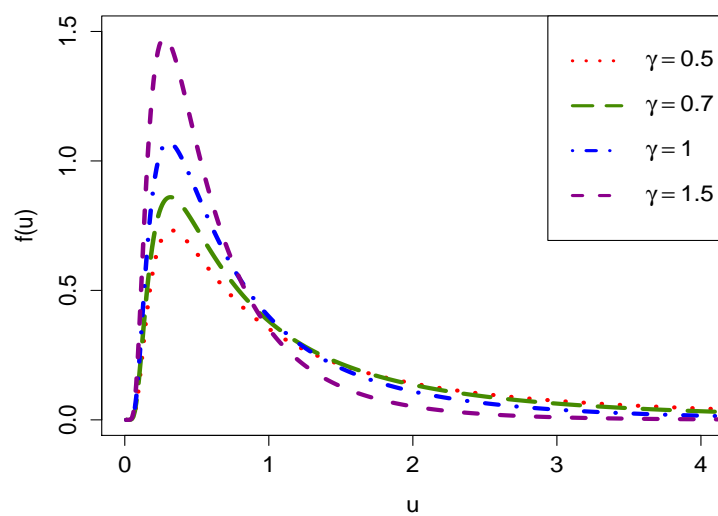


Figura 3 – fdp da distribuição IG para diferentes valores de γ e $\delta = 1$.

No que segue desta seção vamos discutir alguns casos particulares da IG. Especificamente, dois casos serão considerados: i) $\delta = \gamma = \eta$ e ii) $\delta = \eta$ e $\gamma = \eta^2$.

1.2.3 Função de densidade caso $\delta = \gamma = \eta$

Em Browne e McNicholas (2015) foi considerado o caso da $IG(\delta, \gamma)$ tal que $\delta = \gamma = \eta$. Esta parametrização permite reduzir o número de parâmetros e possibilita a estimação dos parâmetros na distribuição inversa gaussiana. Dessa forma, a nova fdp pode ser expressa como

$$h(u; \eta, \eta) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} \exp(\eta^2) u^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{2} \left(\frac{1}{u} + u \right) \right\}, \quad u > 0, \quad (1.6)$$

em que $\eta > 0$. A notação $U \sim IG(\eta, \eta)$ será utilizada.

Seja $U \sim IG(\eta, \eta)$, então sua fda é dada pela seguinte expressão

$$F(u; \eta, \eta) = \Phi \left[\left(\frac{u}{\eta^2} \right)^{-\frac{1}{2}} (u - 1) \right] + \exp(2\eta^2) \Phi \left[\left(\frac{u}{\eta^2} \right)^{-\frac{1}{2}} (u + 1) \right], \quad u > 0,$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a fda da distribuição normal padrão. A seguir apresentamos algumas propriedades para esta parametrização, vide Browne e McNicholas (2015).

1.2.4 Propriedades

Teorema 1.2.4. *Seja $U \sim IG(\eta, \eta)$. Então*

$$A \text{ media é: } E(U) = 1,$$

$$A \text{ variância é: } Var(U) = \frac{1}{\eta^2},$$

$$A \text{ moda é: } Mo(U) = -\frac{3}{2\eta^2} + \left(1 + \frac{9}{4\eta^4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 1.2.5. *i) Seja $U \sim IG(\eta, \eta)$. Então*

$$\frac{\eta^2(U-1)^2}{U} \sim \chi_{(1)}^2;$$

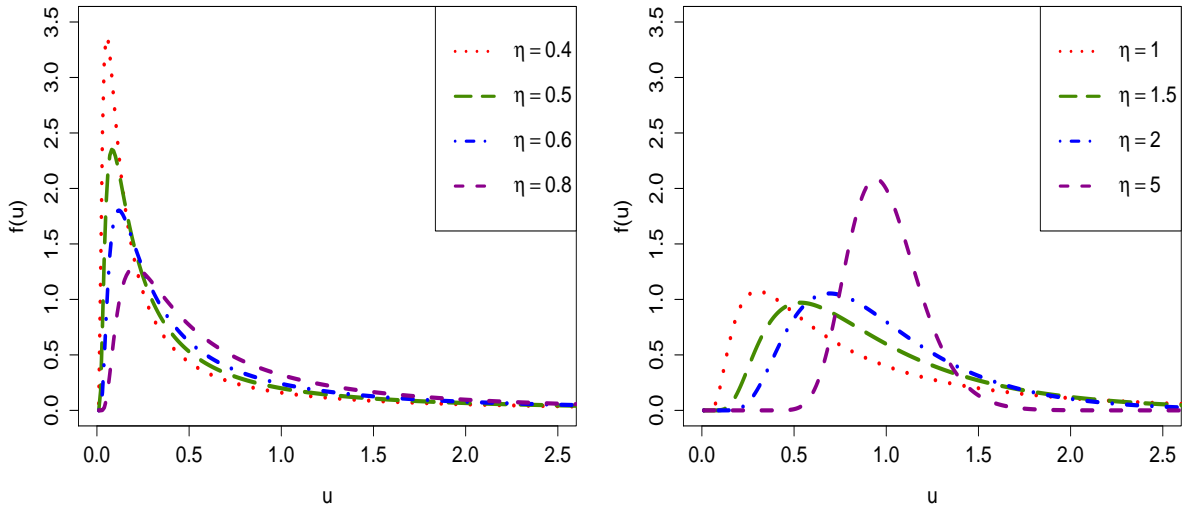
ii) Sejam $U \sim IG(\eta, \eta)$ e c uma constante positiva. Então

$$cU \sim IG \left(\eta\sqrt{c}, \frac{\eta}{\sqrt{c}} \right).$$

A seguir apresentamos varias gráficas da densidade da distribuição $IG(\eta, \eta)$ para diferentes vaores de η .

1.2.4.1 Gráficos de densidade $IG(\eta, \eta)$.

Na Figura 4, apresentamos as densidades da distribuição inversa gaussiana para diferentes valores do parâmetro η . Na Figura 4a, consideramos valores de $\eta < 1$, onde pode-se observar que quando η é pequeno a distribuição é leptocúrtica. Na Figura 4b consideramos os casos em que $\eta \geq 1$, e encontramos dois fatos interessantes. Primeiro notamos como a densidade vira aproximadamente simétrica para o caso em que $\eta = 5$. Segundo, vemos como as caudas da distribuição inversa gaussiana fica mais leves no caso em que $\eta = 5$, isto é ela apresenta o comportamento de uma densidade leptocúrtica.



(a) fdp da distribuição IG para $\eta < 1$

(b) fdp da distribuição IG para $\eta \geq 1$

Figura 4 – fdp da distribuição IG, com $U \sim (\eta, \eta)$ para diferentes valores de η .

1.2.5 Função de densidade caso $\delta = \eta, \gamma = \eta^2$

Em Chhikara e Folks (1989b) é discutida uma parametrização da inversa gaussiana que possibilita a redução do número dos parâmetros a partir de uma mudança na escala da distribuição. Desta forma foi introduzida a parametrização $IG(\eta, \eta^2)$. É dito que $U \sim IG(\eta, \eta^2)$ se sua fdp é dada por

$$h(u; \eta, \eta^2) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} \exp(\eta^3) u^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{2} \left(\frac{1}{u} + \eta^2 u \right) \right\}, \quad u > 0, \quad (1.7)$$

em que $\eta > 0$. Seja $U \sim IG(\eta, \eta^2)$, então sua fda é dada pela seguinte expressão

$$F(u; \eta, \eta) = \Phi \left[\left(\frac{u}{\eta^2} \right)^{-\frac{1}{2}} (u\eta - 1) \right] + \exp(2\eta^3) \Phi \left[\left(\frac{u}{\eta^3} \right)^{-\frac{1}{2}} (u\eta + 1) \right], \quad u > 0.$$

De forma semelhante aos casos anteriores apresentamos a seguir algumas das propriedades básicas desta parametrização.

1.2.6 Propriedades

Teorema 1.2.6. *Seja $U \sim IG(\eta, \eta^2)$. Então*

$$\begin{aligned} \text{A media é: } E(U) &= \frac{1}{\eta}, \\ \text{A variância é: } Var(U) &= \frac{1}{\eta^5}, \\ \text{A moda é: } Mo(U) &= -\frac{3}{2\eta^4} + \frac{1}{\eta} \left(1 + \frac{9}{4\eta^6}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Teorema 1.2.7. *i) Seja $U \sim IG(\eta, \eta^2)$. Então*

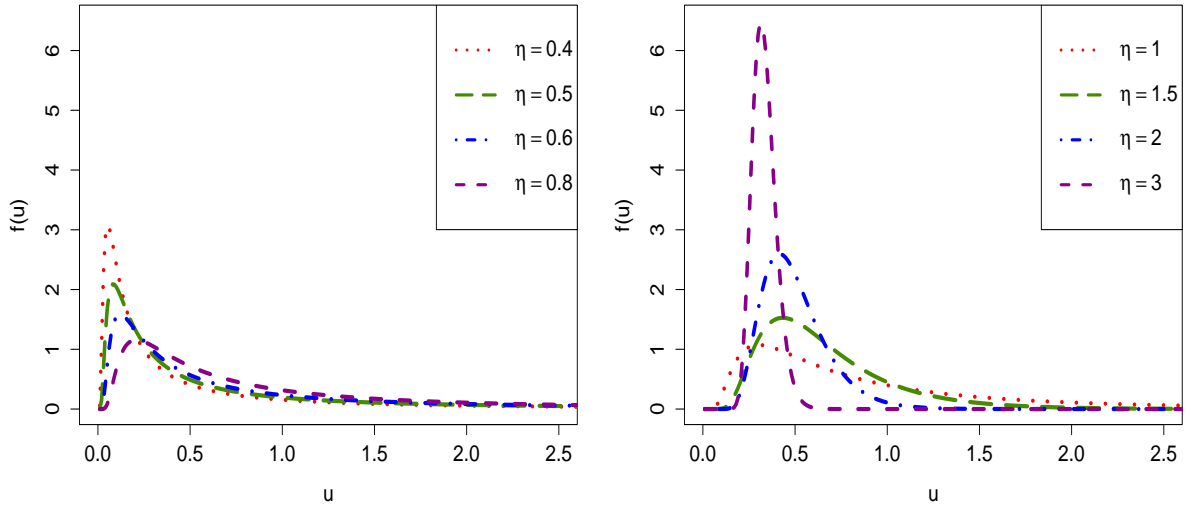
$$\frac{\eta^4(U - \frac{1}{\eta})^2}{U} \sim \chi_{(1)}^2;$$

ii) Sejam $U \sim IG(\eta, \eta^2)$ e c uma constante positiva. Então

$$cU \sim IG\left(\eta\sqrt{c}, \frac{\eta^2}{\sqrt{c}}\right).$$

1.2.6.1 Gráficos de densidade $IG(\eta, \eta^2)$.

Na Figura 5, apresentamos as densidades da distribuição $IG(\eta, \eta^2)$ para diferentes valores do parâmetro η . Na Figura 26a, consideramos diferentes valores de $\eta < 1$, neste caso podemos observar que quando η é pequeno a distribuição é leptocúrtica e com uma forte assimetria. Para o caso em que os valores de $\eta \geq 1$, como se mostra na Figura 26b, quando o valor de η é grande a distribuição é leptocúrtica e aproximadamente simétrica. Comparando as duas Figuras (26a e 26b), podemos concluir que a distribuição é mais leptocúrtica quando o valor de η é maior.

(a) fdp da distribuição IG para $\eta < 1$ (b) fdp da distribuição IG para $\eta \geq 1$ Figura 5 – fdp da distribuição IG, com $U \sim (\eta, \eta^2)$ para diferentes valores de η .

1.3 Distribuição Normal Inversa Gaussiana

Nesta seção apresentamos a distribuição normal inversa gaussiana (NIG) proposta por [Barndorff-Nielsen \(1997\)](#). Esta distribuição é definida a partir de uma mistura da distribuição normal padrão e a distribuição inversa gaussiana, que é chamada mistura media-variância. Esta família de distribuição é assimétrica e leptocúrtica, para certos valores dos parâmetros.

1.3.1 Função de densidade caso geral

Sejam $Z_0 \sim N(0, 1)$ e $U \sim IG(\delta, \gamma)$, com $\delta > 0$ e $\gamma > 0$, duas variáveis aleatórias independentes. Dizemos que uma variável aleatória Z definida a partir da seguinte representação estocástica possui uma distribuição normal inversa gaussiana

$$Z = \mu + \omega U + \sqrt{U} Z_0. \quad (1.8)$$

Esta distribuição será denotada por $Z \sim NIG(\mu, \omega, \delta, \tau)$ em que $\tau = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}$. A fdp de Z é dada pela seguinte expressão

$$f_Z(z) = \frac{\tau}{\pi} \exp(\delta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} - \omega \mu) \phi(z)^{-1/2} K_1(\delta \tau \phi(z)^{1/2}) \exp(\omega z), \quad z \in \mathbb{R},$$

em que $\phi(z) = 1 + [(z - \mu)/\delta]^2$.

1.3.2 Propriedades

Uma importante propriedade para a implementação do algoritmo EM da distribuição normal inversa gaussiana pode ser obtida a partir da representação estocástica (1.8), esta é, $Z|(U = u) \sim N(\mu + \omega u, u)$.

Nos seguintes teoremas, se apresentam algumas propriedades da distribuição normal inversa gaussiana para o caso geral e considerando os casos em que $U \sim IG(\eta, \eta)$ e $U \sim IG(\eta, \eta^2)$.

Teorema 1.3.1. *Seja $Z \sim NIG(\mu, \omega, \delta, \tau)$, com $\tau = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}$ construída a partir da representação estocástica (1.8) considerando $U \sim IG(\delta, \gamma)$. Então temos que*

$$\begin{aligned} \text{A media é: } E(Z) &= \mu + \frac{\delta\omega}{\gamma}, \\ \text{A variância é: } Var(z) &= \frac{\delta\tau^2}{\gamma^3}, \\ \text{A assimetria é: } \gamma_1 &= \frac{3\omega}{\tau\sqrt{\gamma\delta}}, \\ \text{A curtose é: } \gamma_2 &= 3 \frac{(1 + 4\omega^2/\tau^2)}{\delta\gamma}. \end{aligned}$$

Teorema 1.3.2. *Seja $Z \sim NIG(\mu, \omega, \eta, \tau)$, com $\tau = \sqrt{\eta^2 + \omega^2}$ construída a partir da representação estocástica (1.8) considerando $U \sim IG(\eta, \eta)$. Então*

$$\begin{aligned} \text{A media é: } E(Z) &= \mu + \omega, \\ \text{A variância é: } Var(z) &= \frac{\tau^2}{\eta^2}, \\ \text{A assimetria é: } \gamma_1 &= \frac{3\omega}{\tau\eta}, \\ \text{A curtose é: } \gamma_2 &= 3 \frac{(1 + 4\omega^2/\tau^2)}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Teorema 1.3.3. *Seja $Z \sim NIG(\mu, \omega, \eta, \tau)$ construída a partir da representação estocástica (1.8) considerando $U \sim IG(\eta, \eta^2)$, com $\tau = \sqrt{\eta^4 + \omega^2}$. Então*

$$\begin{aligned} \text{A media é: } E(Z) &= \mu + \frac{\omega}{\eta}, \\ \text{A variância é: } Var(z) &= \frac{\tau^2}{\eta^5}, \\ \text{A assimetria é: } \gamma_1 &= \frac{3\omega}{\tau\eta^{3/2}}, \\ \text{A curtose é: } \gamma_2 &= 3 \frac{(1 + 4\omega^2/\tau^2)}{\eta^3}. \end{aligned}$$

A continuação, se define esta distribuição com algumas propriedades. Esta distribuição sera utilizada para obter uma generalização da distribuição BS usual.

1.3.3 Função de densidade para o caso simétrico

Quando $\omega = 0$ ($\mu = 0$), temos de (1.8) que Z segue uma distribuição escala normal, veja Chang et al. (2005), Hanssen e Oigard (2001). Z pode ser expressado da seguinte forma

$$Z = \sqrt{U}Z_0,$$

em que $Z_0 \sim N(0, 1)$ e U é uma variável aleatória independente de Z que segue uma distribuição inversa gaussiana, com fdp dada em (1.1). Assim, a distribuição normal inversa gaussiana simétrica (NIGS), surge como a distribuição marginal de Z e a representação hierárquica dada por

$$Z|(U = u) \sim N(0, u) \text{ e } U \sim IG(\delta, \gamma).$$

É possível ver como a fdp condicional de Z é

$$f(z|u) = \frac{1}{(2\pi u)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2u}z^2\right) \quad z \in \mathbb{R}.$$

Assim, a fdp de Z pode ser obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^\infty f(z|u)h(u)du \\ &= \left(\frac{\gamma}{\pi}\right) \left(1 + \frac{z^2}{\delta^2}\right)^{-1/2} K_1\left(\delta\gamma\sqrt{1 + \frac{z^2}{\delta^2}}\right) \exp(\delta\gamma) \\ &= \left(\frac{\gamma\delta}{\pi}\right) (z^2 + \delta^2)^{-1/2} K_1(\gamma\sqrt{\delta^2 + z^2}) \exp(\delta\gamma), \end{aligned} \quad (1.9)$$

em que $K_1(\cdot)$ é a função Bessel de terceiro tipo modificada definida em (1.5), com $\lambda = 1$. Assim a fdp de Z é

$$f_Z(z) = \left(\frac{\gamma\delta}{\pi}\right) (z^2 + \delta^2)^{-1/2} K_1(\gamma\sqrt{\delta^2 + z^2}) \exp(\delta\gamma), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Desta forma Z possui uma distribuição normal inversa gaussiana simétrica padrão, denotada por $Z \sim NIGS(0, 1; \delta, \gamma)$, com δ o parâmetro de escala, γ o parâmetro de forma. Para mais detalhes pode-se consultar Chang et al. (2005) e Hanssen e Oigard (2001). Hanssen e Oigard (2001) provou que

$$E[Z] = 0 \quad \text{e} \quad Var(Z) = \frac{\delta}{\gamma};$$

em que $\delta, \gamma > 0$.

Na Figura 6, apresentamos as densidades da distribuição normal inversa gaussiana para diferentes valores do parâmetro $\delta = 0.2, 0.5, 1, 1.5$ e $\gamma = 1$. Podemos observar que quando o valor de δ é pequeno a distribuição é leptocúrtica, e quando o valor de δ é grande a distribuição é platicúrtica. Na Figura 7, se apresentam a função de densidade da distribuição normal inversa gaussiana para diferentes valores do parâmetro $\gamma = 0.2, 0.5, 1, 1.5$ e $\delta = 1$, podemos observar que quando o valor de γ é aumenta a distribuição é leptocúrtica.

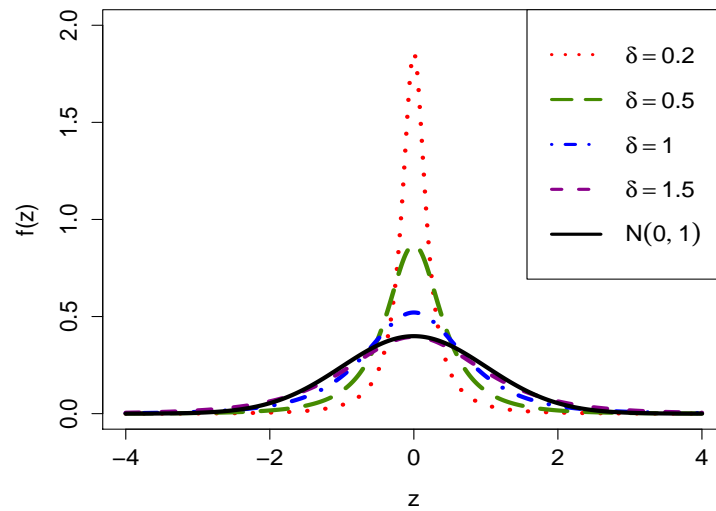


Figura 6 – fdp da distribuição NIG para diferentes valores de δ e $\gamma = 1$.

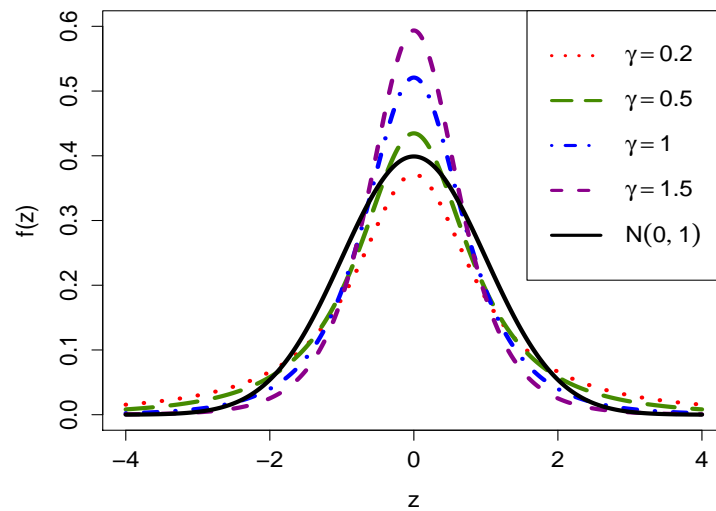


Figura 7 – fdp da distribuição NIG para diferentes valores de γ e $\delta = 1$.

1.4 Algoritmo EM na distribuição NIG

Nesta seção apresentaremos o algoritmo EM usado para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição normal inversa gaussiana, inspirado na ideia do artigo de [Karlis \(2002\)](#).

Desde a introdução do algoritmo EM no artigo seminal [Dempster, Laird e Rubin \(1977\)](#) ele se transformou numa ferramenta muito importante para a estimação de parâmetros sob uma perspectiva frequentista. Este algoritmo consiste de duas etapas, na Etapa E (Expectation), se calcula a esperança das variáveis não observadas (as variáveis aumentadas U consideradas neste caso) dado os valores actuais dos parâmetros. Na Etapa M (Maximisation), maximiza-se a probabilidade dos dados completos (dados observados e não observados) usando as esperanças da etapa anterior.

Sejam $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$ os dados observados e $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$ os dados não observados, sendo assim os dados completos definidos como $\mathbf{z}_c = (\mathbf{z}^\top, \mathbf{u}^\top)^\top$.

1.4.1 Algoritmo EM quando $U \sim IG(\delta, \gamma)$

Seja Z_1, \dots, Z_n uma amostra aleatória de tamanho n de $Z \sim NIG(\mu, \omega, \delta, \tau)$, com a fdp dada por

$$f_Z(z) = \frac{\tau}{\pi} \exp(\delta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} - \omega \mu) \phi(z)^{-1/2} K_1(\delta \tau \phi(z)^{1/2}) \exp(\omega z),$$

em que $\tau = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}$, $\phi(z) = 1 + [(z - \mu)^2 / \delta]^2$ e $U \sim IG(\delta, \gamma)$ tendo fdp dada por

$$h(u; \delta, \gamma) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \exp(\delta \gamma) u^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{u} + \gamma^2 u \right) \right\}, \quad u > 0;$$

em que $\delta > 0$ e $\gamma > 0$.

Seja $\ell_c = (\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_c)$ a função de verossimilhança dos dados completos e $Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_c) | \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\theta}}]$ seu valor esperado condicionado nos dados observados, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \omega, \delta, \tau)^\top$ o vector de parâmetros e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é o vector de parâmetros estimados. As duas etapas do algoritmo são definidas da seguinte forma:

Etapa E: Calcule $Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)})$, para $r = 1, \dots, n$;

Etapa M: Encontre $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)}$ para $r = 1, \dots, n$.

Como

$$\begin{aligned} Z_i | (U_i = u_i) &\stackrel{\text{ind}}{\sim} N(\mu + \omega u, u), \\ U_i &\stackrel{\text{ind}}{\sim} IG(\delta, \gamma), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

em que *ind* significa que as variáveis são independentes. Assim, a função de log-verossimilhança completa associada com $\mathbf{z}_c = (\mathbf{t}^\top, \mathbf{u}^\top)^\top$ é dada por

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_c) = c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \mu - \omega u_i)^2}{u_i} + n \log(\delta) + n \delta \gamma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta^2}{u_i} + \gamma^2 u_i \right),$$

em que c é uma constante que não depende dos parâmetros.

Assumindo que

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= E[U_i | z_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\phi(z_i)}{\tau} \frac{K_0(\tau \phi(z_i))}{K_1(\tau \phi(z_i))}, \\ \hat{v}_i &= E[U_i^{-1} | z_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\tau}{\phi(z_i)} \frac{K_{-2}(\tau \phi(z_i))}{K_{-1}(\tau \phi(z_i))}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

em que $\phi(z_i) = \delta [\delta^2 + (z_i - \mu)^2]^{1/2}$ para $i = 1, \dots, n$. Assim a esperança condicional da função de log-verossimilhança completa tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 \hat{v}_i + \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \omega - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega^2 \hat{u}_i + n \log(\delta) + n \delta \gamma \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\delta^2 \hat{v}_i + \gamma^2 \hat{u}_i). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Derivando $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ em (1.12) com respeito aos parâmetros, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n z_i \hat{v}_i - \mu \sum_{i=1}^n \hat{v}_i - n \omega, \\
\frac{Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \omega} &= \sum_{i=1}^n z_i - n \mu - \omega \sum_{i=1}^n \hat{u}_i, \\
\frac{Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \delta} &= \frac{n}{\delta} + n \gamma - \delta \sum_{i=1}^n \hat{v}_i, \\
\frac{Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \gamma} &= n \delta - \gamma \sum_{i=1}^n \hat{u}_i.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Em seguida, temos a implementação do algoritmo EM para as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição NIG, para o caso geral pode ser resumido como segue:

Etapa E: Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, calcule \hat{u}_i e \hat{v}_i para $i = 1, \dots, n$;

Etapa M: Atualize os parâmetros usando os pseudo valores calculados no passo E. Assim, as estimativas dos parâmetros nesta etapa são:

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}^{(r+1)} &= \bar{z} - \hat{\omega}^{(r+1)} \bar{u}, \\
\hat{\omega}^{(r+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \hat{v}_i - \bar{z} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i}{n - \bar{u} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i}, \\
\hat{\delta}^{(r+1)} &= n^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n \hat{v}_i^{(r)} - \frac{n}{\bar{u}_i} \right]^{-1/2}, \\
\hat{\gamma}^{(r+1)} &= \frac{\hat{\delta}^{(r)}}{\bar{u}_i}, \\
\hat{\tau}^{(r+1)} &= [(\hat{\gamma}^{(r+1)})^2 + (\hat{\omega}^{(r+1)})^2]^{1/2},
\end{aligned} \tag{1.14}$$

em que $\bar{u}_i = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)} / n$ e $\bar{z}_i = \sum_{i=1}^n z_i / n$.

Este procedimento é iterativo até convergência ser atingida.

1.4.2 Algoritmo EM quando $U \sim IG(\eta, \eta)$

Seja Z_1, \dots, Z_n uma amostra aleatória e tamanho n de $Z \sim NIG(\mu, \omega, \eta, \tau)$, com a fdp dada por

$$f_Z(z) = \frac{\tau}{\pi} \exp(\eta\sqrt{\tau^2 - \omega^2} - \omega\mu) \phi(z)^{-1/2} K_1(\eta\tau\phi(z)^{1/2}) \exp(\omega z), \quad z \in \mathbb{R},$$

em que $\tau = \sqrt{\eta^2 + \omega^2}$, $\phi(z) = 1 + [(z - \mu)^2/\eta]^2$ e $U \sim IG(\eta, \eta)$.

Sejam $\ell_c = (\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_c)$ a função de verossimilhança dos dados completos, $Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_c) | \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\theta}}]$ seu valor esperado condicionado nos dados observados, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \omega, \eta, \tau)^\top$ o vector de parâmetros e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ o vetor dos parâmetros estimados.

Sob esta parametrização, temos que

$$\begin{aligned} Z_i | (U_i = u_i) &\stackrel{\text{ind}}{\sim} N(\mu + \omega u, u), \\ U_i &\stackrel{\text{ind}}{\sim} IG(\eta, \eta), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Assim, a função de log-verossimilhança completa associada com $\mathbf{z}_c = (\mathbf{z}^\top, \mathbf{u}^\top)^\top$ é dada por

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_c) = c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \mu - \omega u_i)^2}{u_i} + n \log(\eta) + n \eta^2 - \frac{\eta^2}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{u_i} + u_i \right),$$

em que c é uma constante que não depende dos parâmetros.

Assumindo que

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= E[U_i | z_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\phi(z_i)}{\tau} \frac{K_0(\tau \phi(z_i))}{K_1(\tau \phi(z_i))}, \\ \hat{v}_i &= E[U_i^{-1} | z_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\tau}{\phi(z_i)} \frac{K_{-2}(\tau \phi(z_i))}{K_{-1}(\tau \phi(z_i))}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

em que $\phi(z_i) = \delta [\delta^2 + (z_i - \mu)^2]^{1/2}$ para $i = 1, \dots, n$.

Assim a esperança condicional da função de log-verossimilhança completa tem a seguinte forma,

$$Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}) = c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 \hat{v}_i + \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \omega - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega^2 \hat{u}_i + n \log(\eta) + n \eta^2 - \frac{\eta^2}{2} \sum_{i=1}^n (\hat{v}_i + \hat{u}_i). \quad (1.16)$$

Derivando $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ em (1.16) com respeito aos parâmetros, temos que

$$\begin{aligned}\frac{Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n z_i \hat{v}_i - \mu \sum_{i=1}^n \hat{v}_i - n \omega, \\ \frac{Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \omega} &= \sum_{i=1}^n z_i - n \mu - \omega \sum_{i=1}^n \hat{u}_i, \\ \frac{Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \eta} &= \frac{n}{\eta} + 2n\eta - \eta \sum_{i=1}^n (\hat{v}_i + \hat{u}_i).\end{aligned}\tag{1.17}$$

Em seguida, temos a implementação do algoritmo EM para as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição NIG quando $IG(\eta, \eta)$, como se segue:

Etapa E: Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, calcule \hat{u}_i e \hat{v}_i para $i = 1, \dots, n$;

Etapa M: Atualize os parâmetros usando os pseudo valores calculados no passo E. Assim, as estimativas para os parâmetros são:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^{(r+1)} &= \bar{z} - \hat{\omega}^{(r+1)} \bar{u}, \\ \hat{\omega}^{(r+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \hat{v}_i - \bar{z} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i}{n - \bar{u} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i}, \\ \hat{\eta}^{(r+1)} &= n^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n (\hat{v}_i^{(r)} + \hat{u}_i^{(r)}) - 2n \right]^{-1/2}, \\ \hat{\tau}^{(r+1)} &= [(\hat{\eta}^{(r+1)})^2 + (\hat{\omega}^{(r+1)})^2]^{1/2}.\end{aligned}\tag{1.18}$$

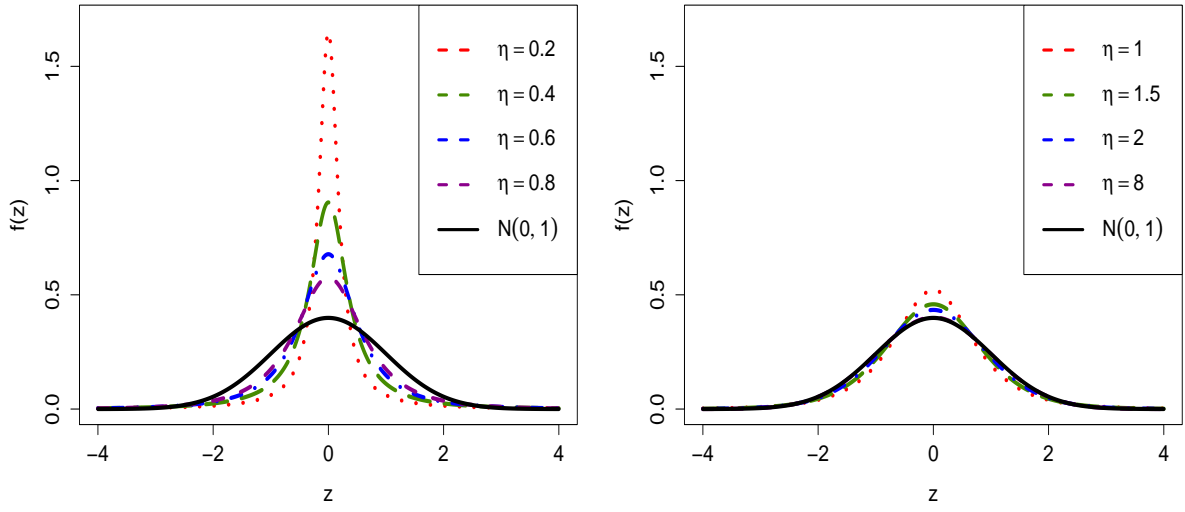
em que, $\bar{u}_i = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)} / n$ e $\bar{z}_i = \sum_{i=1}^n z_i / n$.

Este procedimento itera até convergência ser atingida.

Nas Figuras 8 apresentamos as densidades da distribuição normal gaussiana inversa para o caso simétrico, $NIGS(0, 1; \eta, \eta)$ e da normal padrão. Na Figura 8a podemos observar que para valores de η pequenos a distribuição é leptocúrtica e mais concentrada ao redor da média. Na Figura 8b, podemos observar como o comportamento das densidades para $\eta \geq 1$ é muito semelhante ao da normal padrão, isto é, a distribuição é mesocúrtica.

1.4.3 Algoritmo EM quando $U \sim IG(\eta, \eta^2)$

Seja Z_1, \dots, Z_n uma amostra aleatória e tamanho n de $Z \sim NIG(\mu, \omega, \eta, \tau)$, com a fdp dada por

(a) fdp da distribuição NIGS para $\eta < 1$ (b) fdp da distribuição NIGS para $\eta \geq 1$ Figura 8 – fdp da distribuição $NIGS(0, 1; \eta, \eta)$ para diferentes valores de η .

$$f_Z(z) = \frac{\tau \eta}{\pi} \exp(\eta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} - \omega \mu) [\eta^2 + (z - \mu)^2]^{-1/2} K_1(\tau [\eta^2 + (z - \mu)^2]^{1/2}) \exp(\omega z),$$

em que $\tau = \sqrt{\eta^4 + \omega^2}$.

Sejam $\ell_c = (\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_c)$ a função de verossimilhança dos dados completos, $Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_c) | \mathbf{z}, \hat{\boldsymbol{\theta}}]$ seu valor esperado condicionado nos dados observados, $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \omega, \eta, \tau)^\top$, o vector de parâmetros e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ o vector de parâmetros estimados.

Neste caso

$$\begin{aligned} Z_i | (U_i = u_i) &\stackrel{\text{ind}}{\sim} N(\mu + \omega u, u), \\ U_i &\stackrel{\text{ind}}{\sim} IG(\eta, \eta^2), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Assim, a função de log-verossimilhança completa associada com $\mathbf{z}_c = (\mathbf{t}^\top, \mathbf{u}^\top)^\top$ é dada por

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}_c) = c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - \mu - \omega u_i)^2}{u_i} + n \log(\eta) + n \eta^3 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\eta^2}{u_i} + \eta^4 u_i \right),$$

em que c é uma constante que não depende dos parâmetros.

Assumindo que

$$\begin{aligned}\hat{u}_i &= E[U_i | z_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\phi(z_i)}{\tau} \frac{K_0(\tau \phi(z_i))}{K_1(\tau \phi(z_i))}, \\ \hat{v}_i &= E[U_i^{-1} | z_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\tau}{\phi(z_i)} \frac{K_{-2}(\tau \phi(z_i))}{K_{-1}(\tau \phi(z_i))},\end{aligned}\quad (1.19)$$

em que $\phi(z_i) = \delta [\delta^2 + (z_i - \mu)^2]^{1/2}$ para $i = 1, \dots, n$.

Assim a esperança condicional da função de log-verossimilhança completa tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu)^2 \hat{v}_i + \sum_{i=1}^n (z_i - \mu) \omega - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega^2 \hat{u}_i + n \log(\eta) + n \eta^3 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\eta^2 \hat{v}_i + \eta^4 \hat{u}_i).\end{aligned}\quad (1.20)$$

Derivando $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ em (1.20) com respeito aos parâmetros, temos que

$$\begin{aligned}\frac{Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n z_i \hat{v}_i - \mu \sum_{i=1}^n \hat{v}_i - n \omega, \\ \frac{Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \omega} &= \sum_{i=1}^n z_i - n \mu - \omega \sum_{i=1}^n \hat{u}_i, \\ \frac{Q(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial \eta} &= \frac{n}{\eta} + 3 n \eta^2 - \sum_{i=1}^n (\eta \hat{v}_i + 2 \eta^3 \hat{u}_i).\end{aligned}\quad (1.21)$$

Em seguida, temos a implementação do algoritmo EM para as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição NIG quando $IG(\eta, \eta^2)$, como se segue:

Etapa E: Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, calcule \hat{u}_i e \hat{v}_i para $i = 1, \dots, n$;

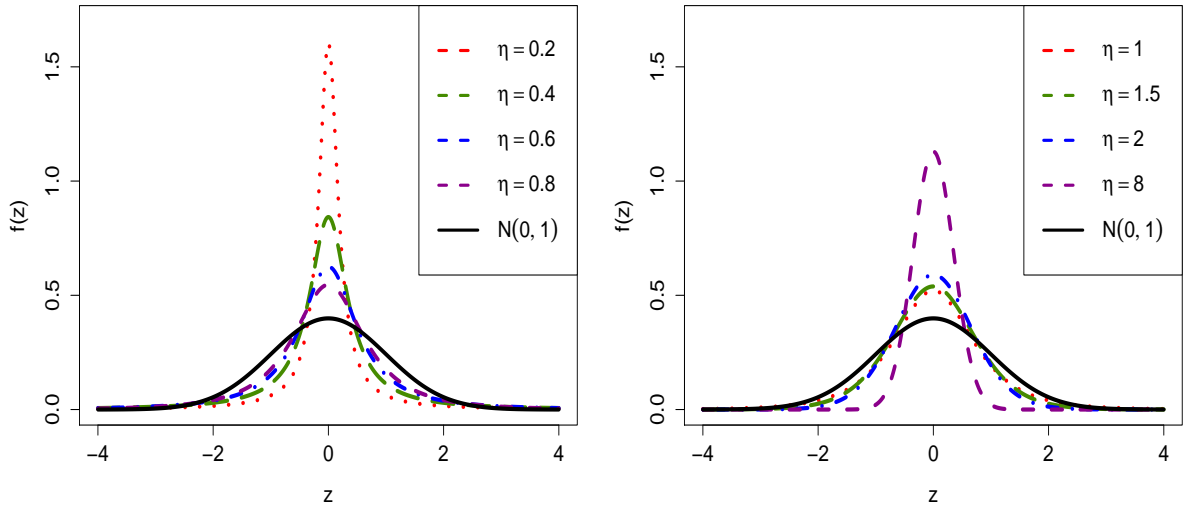
Etapa M: Atualize os parâmetros usando os pseudo valores calculados no passo E, as estimativas dos parâmetros são:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^{(r+1)} &= \bar{z} - \hat{\omega}^{(r+1)} \bar{u}, \\ \hat{\omega}^{(r+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i \hat{v}_i - \bar{z} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i}{n - \bar{u} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i}, \\ n - 2 \hat{\eta}^{4(r+1)} + 3 n \hat{\eta}^{3(r+1)} - \hat{\eta}^{2(r+1)} \sum_{i=1}^n \hat{v}_i^{(r)} &= 0, \\ \hat{\tau}^{(r+1)} &= [(\hat{\eta}^{(r+1)})^2 + (\hat{\omega}^{(r+1)})^2]^{1/2},\end{aligned}\quad (1.22)$$

em que $\bar{u}_i = \sum_{r=1}^n \hat{u}_i^{(r)} / n$ e $\bar{z}_i = \sum_{i=1}^n z_i / n$.

Este procedimento é iterativo até convergência ser atingida.

Nas Figuras 9 apresentamos as densidades da distribuição normal gaussiana inversa para o caso simétrico, $NIGS(0, 1; \eta, \eta^2)$ e da normal padrão. Na Figura 9a podemos observar que para valores de η pequenos a distribuição é leptocúrtica, é mais concentrada ao redor da media do que a normal padrão. Na Figura 9b, podemos observar que para valores de $\eta > 1$ a curtose da distribuição aumenta. É interessante notar como a densidade da normal inversa gaussiana simétrica tem sempre um maior coeficiente de curtose do que a normal padrão, sendo a distribuição $NIGS(0, 1; 1, 1)$ a mais proxima à densidade normal padrão. Este fato é contrario ao observado nas Figuras 8, onde vejamos como para valores maiores do parâmetro η a forma da densidade da distribuição $NIGS(0, 1; \eta, \eta)$ se aproxima cada vez mais à normal padrão.



(a) fdp da distribuição NIGS para $\eta < 1$

(b) fdp da distribuição NIGS para $\eta \geq 1$

Figura 9 – fdp da distribuição $NIGS(0, 1; \eta, \eta^2)$ para diferentes valores de η .

1.5 Comentários Finais do Capítulo

Neste capítulo apresentamos as distribuições inversa gaussiana e normal inversa gaussiana para diferentes parametrizações. Em cada caso exploramos algumas propriedades básicas da distribuição e analisamos a curtose e simetria de cada uma. O problema de estimação dos parâmetros foi abordado a partir de uma perspectiva frequentista, em particular foi desenvolvido o algoritmo de estimação EM o qual será utilizado nos seguintes capítulos.

2 A Distribuição Birnbaum Saunders baseada na Distribuição Inversa Gaussiana

2.1 Distribuição Birnbaum Saunders

A distribuição birbaum saunders (BS) foi inicialmente proposta por [Birnbaum e Saunders \(1969b\)](#). Esta distribuição foi motivada por problemas de vibração encontrados em aviões comerciais. Eles propuseram uma família de distribuições de vida para modelar o tempo de vida de materiais submetidos a cargas dinâmicas. Esta distribuição tem um importante papel na modelagem do tempo de falha em processos de fadiga, isto é na modelagem dos tempos de falha de objetos submetidos a um desgaste cíclico.

Neste capítulo, vamos discutir uma extensão da distribuição BS, em lugar da distribuição normal, vamos considerar a distribuição normal inversa gaussiana, onde os parâmetros considerados a esta distribuição serão desconhecidos. O estudo será separados em dois casos: *i*) quando $U \sim IG(\eta, \eta)$ e *ii*) quando $U \sim IG(\eta, \eta^2)$.

2.1.1 Função de densidade

Uma das causas do interesse na distribuição BS é por sua estreita relação com a distribuição normal. Esta relação é

$$T = \beta \left[\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right]^2, \quad (2.1)$$

em que $Z \sim N(0, 1)$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

A variável aleatória T em (2.1) possui uma distribuição BS, com parâmetro de forma α e parâmetro de escala β . Usamos a notação $T \sim BS(\alpha, \beta)$, como em [Birnbaum e Saunders \(1969b\)](#). O parâmetro β , corresponde à mediana da distribuição, uma vez que $F_T(\beta) = \Phi(0) = 1/2$, com F_T denotando a fda da BS. Varias distribuições podem ser obtidas a partir da BS.

- Quando o parâmetro α tende a zero, a distribuição BS tende a uma distribuição normal;
- Seja $T^* = T/\beta$, então $T^* \sim BS(\alpha, 1)$.

Da relação em (2.1), podemos expressar Z em termos de T como

$$Z = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right) \sim N(0, 1).$$

Seja $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então sua fdp é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \phi(a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right) \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\phi(\cdot)$ é a função de densidade de probabilidade (fdp) da $N(0, 1)$. Além disso

$$a_t(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \quad \text{e} \quad A_t(\alpha, \beta) = \frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta) = \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}. \quad (2.3)$$

Para $T \sim BS(\alpha, \beta)$, a função de distribuição acumulada (fda) de T pode ser expressada como

$$F_T(t) = \Phi(a_t(\alpha, \beta)),$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a fdp da $N(0, 1)$. É possível provar a partir da fda de T que o percentil de ordem p pode ser escrito da seguinte forma

$$t_p = \frac{\beta}{4} \left(\alpha z_p + \sqrt{\alpha^2 z_p^2 + 4} \right)^2,$$

em que z_p é o p -ésimo percentil da distribuição normal padrão. No seguinte teorema apresentamos a media e variância para uma variável aleatória T . Pode ser consultada em [Saunders \(1974\)](#).

Teorema 2.1.1. *Seja $T \sim BS(\alpha, \beta)$. Então*

i)

$$A \text{ media é: } E[T] = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right),$$

$$A \text{ variância é: } Var[T] = \beta^2 \alpha^2 \left(\frac{5}{4} \alpha^2 + 1 \right);$$

- ii) Seja $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então $aT \sim BS(\alpha, a\beta)$, para toda constante a positiva, é dizer, a distribuição BS possui a propriedade de ser fechada sob transformações de escala;
- iii) Seja $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então $T^{-1} \sim BS(\alpha, \beta^{-1})$, é dizer, a distribuição BS possui a propriedade de ser fechada sob reciprocidade, com as respectivas esperança e variância

$$E[T] = \beta^{-1} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad e \quad Var[T] = \beta^{-2} \alpha^2 \left(\frac{5}{4} \alpha^2 + 1 \right),$$

para mais detalhes pode-se consultar [Saunders \(1974\)](#).

Na Figura 10 apresentamos varias densidades da distribuição BS para diferentes valores de α e para $\beta = 1$, podemos observar que para valores de α grandes a distribuição torna-se assimétrica e apresenta caudas mais pesadas.

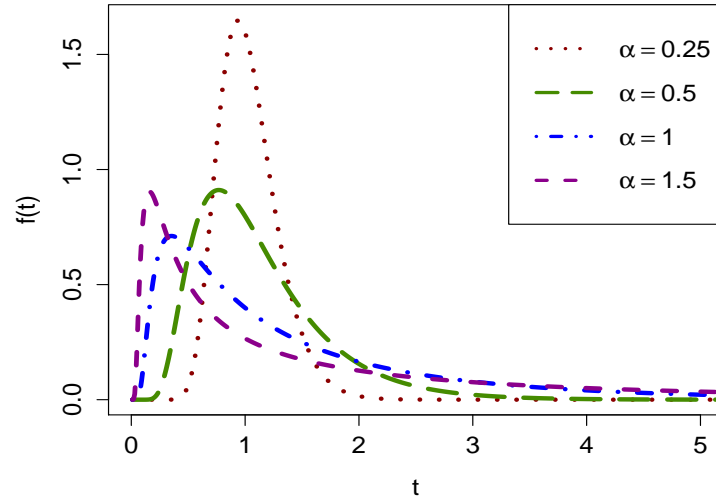


Figura 10 – fdp da distribuição BS com diferentes valores de α e $\beta = 1$.

2.2 Distribuição Birnbaum-Saunders Normal Inversa Gaussiana: Caso simétrico

Nesta parte vamos discutir a extensão da distribuição BS baseada na NIG simétrica, $\omega = 0$. Para esta construção, vamos seguir a ideia [Balakrishnan et al. \(2009\)](#), considere a variável aleatória T com a representação estocástica dada por

$$T = \frac{\beta}{4} \left(\alpha \sqrt{U} Z_0 + \sqrt{(\alpha \sqrt{U} Z_0)^2 + 4} \right)^2, \quad (2.4)$$

em que $Z_0 \sim N(0, 1)$ e $U \sim IG(\delta, \gamma)$ com Z_0 e U independentes, em outras palavras, $Z = \sqrt{U}Z_0$, tem distribuição normal inversa gaussiana simétrica. Utilizando a função de densidade de Z em (1.10) e (2.4), obtemos que a fdp de T é dada por

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta))A_t(\alpha, \beta) \\ &= \left(\frac{\gamma\delta}{\pi}\right) (\delta^2 + a_t^2)^{-1/2} K_1(\gamma\sqrt{\delta^2 + a_t^2}) \exp(\delta\gamma)A_t(\alpha, \beta); \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que $\phi_{NIG}(\cdot)$ é a fdp de $Z \sim NIGS(0, 1; \delta, \gamma)$, $a_t(\alpha, \beta)$ e $A_t(\alpha, \beta)$ são como (2.3).

Esta nova distribuição é denotada como $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Esta distribuição corresponde a um tipo de distribuição BS baseada na distribuição normal inversa gaussiana simétrica ($NIGS(0, 1; \delta, \gamma)$).

2.2.0.1 Gráficos de densidade

Nas seguintes figuras apresentamos as densidades da distribuição BSIG para diferentes valores dos parâmetros. Na Figura 11 apresentamos a densidade da distribuição BSIG para diferentes valores de α com β, δ, γ iguais a 1. Podemos observar que quando α aumenta a densidade vira mais assimétrica. Na Figura 12 apresentamos as densidades da distribuição BSIG para diferentes valores de δ com α, β, γ iguais a 1, nela podemos ver como quando o valor de δ a assimetria da distribuição também aumenta. Da Figura 12 é também possível observar como segundo o valor de δ aumentar as caudas das distribuições ficam mais pesadas. Na Figura 13 apresentamos as densidades da BSIG para diferentes valores de γ com os demais parâmetros iguais a um, nela podemos ver para diferentes valores de γ considerados tem caudas muito semelhantes.

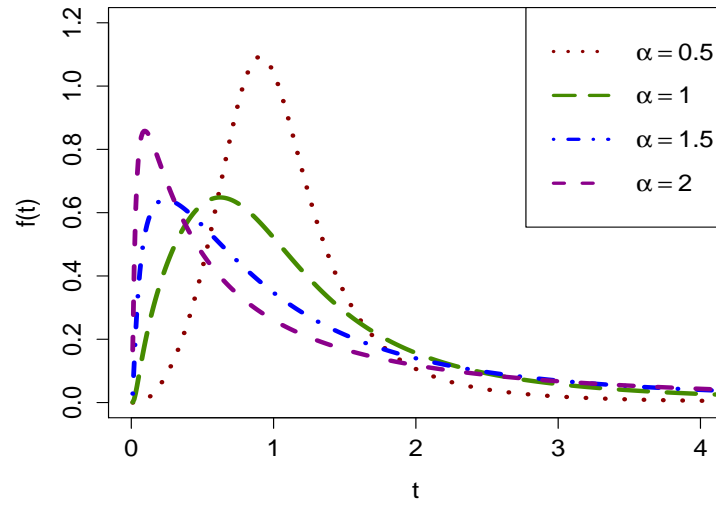


Figura 11 – fdp da distribuição BSIG para diferentes valores de α , com β, δ, γ fixos e iguais.

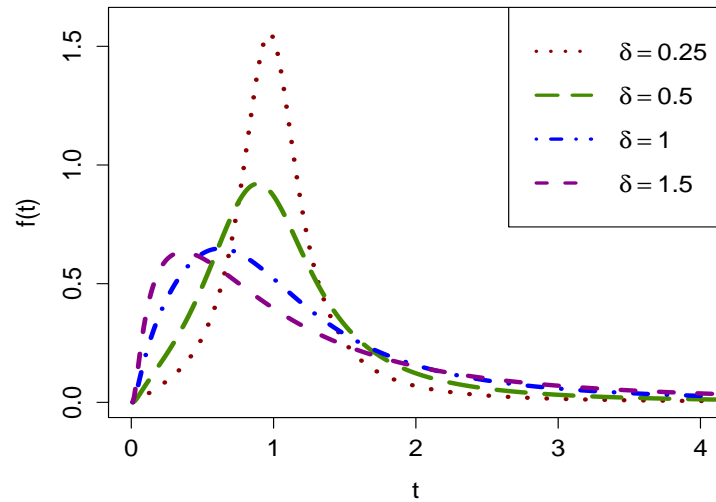


Figura 12 – fdp da distribuição BSIG para diferentes valores de δ , com α, β, γ fixos e iguais a 1.

2.2.1 Propriedades da Distribuição BSIG.

A seguir apresentaremos algumas propriedades da distribuição BSIG as quais herda da distribuição BS, a prova dos seguintes resultados podem ser consultadas em [Birnbaum e Saunders \(1969b\)](#).

Teorema 2.2.1. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então*

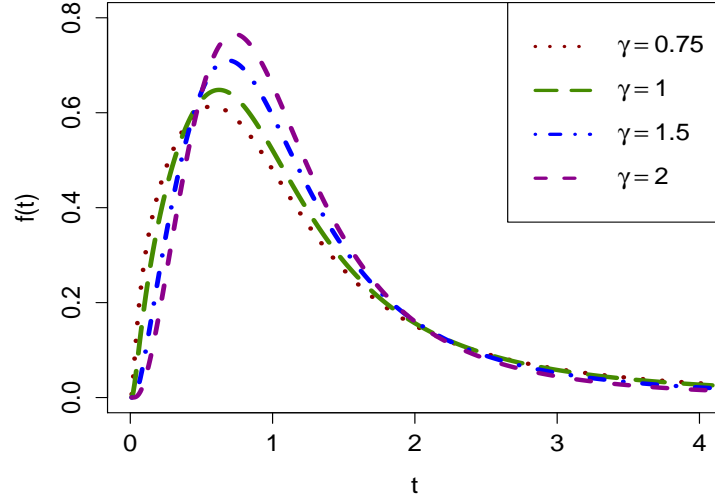


Figura 13 – fdp da distribuição BSIG para diferentes valores de γ e com α, β e δ fixos e iguais a 1.

i) $aT \sim BSIG(\alpha, a\beta; \delta, \gamma)$, com $a > 0$;

ii) $T^{-1} \sim BSIG(\alpha, \beta^{-1}; \delta, \gamma)$.

Os seguintes resultados fornecem distribuições condicionais que são utilizadas na implementação do algoritmo EM.

Teorema 2.2.2. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então a variável aleatória T , dado $U = u$, denotada por $T|(U = u)$, segue a distribuição BS clássica com parâmetros $\sqrt{u}\alpha$ e β , denotada por*

$$T|(U = u) \sim BS(\sqrt{u}\alpha, \beta).$$

Corolário 2.2.3. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então*

i) $U|(T = t) \sim GIG(-1, \sqrt{a_t^2 + \delta^2}, \gamma)$;

ii) *Os momentos da variável aleatória $U^r|(T = t)$ são dados por*

$$E[U^r|T = t] = \frac{K_{r-1}(\gamma\sqrt{a_t^2 + \delta^2})}{K_{-1}(\gamma\sqrt{a_t^2 + \delta^2})} \left(\frac{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}{\gamma} \right)^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $r = -1$, temos

$$E[U^{-1}|T = t] = \frac{K_2(\gamma\sqrt{a_t^2 + \delta^2})}{K_1(\gamma\sqrt{a_t^2 + \delta^2})} \frac{\gamma}{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Os seguintes resultados apresentam os momentos da distribuição BSIG.

Teorema 2.2.4. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$, com representação estocástica dada em (2.4). Então o k -ésimo momento de T é dado por*

$$E[T^k] = \beta^k \sum_{j=0}^k \binom{2k}{2j} \sum_{i=j}^k \binom{k-j}{i-j} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2i} v_i E[Z_0^{2i}],$$

em que $k = 1, 2, \dots$, $v_i = E[U^i]$ dado em (1.4).

Corolário 2.2.5. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então a media, a variância, coeficiente de variação, assimetria e curtose de T são dados respectivamente*

$$\begin{aligned} E[T] &= \frac{\beta}{2}(2 + v_1\alpha^2), \\ Var[T] &= \frac{\beta^2\alpha^2}{4}(4v_1 + (6v_2 - v_1^2)\alpha^2), \\ \gamma[T] &= \frac{\alpha(4v_1 + (6v_2 - v_1^2)\alpha^2)^{1/2}}{2 + v_1\alpha^2}, \\ \alpha_3[T] &= \frac{4\alpha((9v_2 - 3v_1^2) + \frac{1}{2}(30v_3 - 9v_1v_2 + v_1^3)\alpha^2)}{(4v_1 + (6v_2 - v_1^2)\alpha^2)^{3/2}}, \\ \alpha_4[T] &= \frac{3[16v_3 + (160v_3 - 48v_1v_2 + 8v_1^3)\alpha^2 + (280v_4 - 80v_1v_3 - 80v_1v_3 + 9v_1^2v_2 - v_1^4)\alpha^4]}{(4v_1 + (6v_2 - v_1^2)\alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

em que, v é definido no (1.4).

2.3 Distribuição Birnbaum-Saunders Normal Inversa Gaussiana: Caso assimétrico

A distribuição BSIG é um tipo de distribuição BS baseada na distribuição NIG. Esta distribuição tem sido usada na area de finanças, como pode-se pesquisar nos trabalhos de [Barndorff-Nielsen e Blaesild \(1981\)](#), [Barndorff-Nielsen \(1997\)](#), [Lillestol \(2000\)](#), [Kalemanova, Schmid e Werner \(2007\)](#), entre outros. Esta família de distribuições tem a propriedade de fornecer um ajuste de dados com presença de caudas pesadas e de assimetria. A distribuição NIG proposta por [Barndorff-Nielsen \(1997\)](#) é definida como uma mistura media-variância.

Na Equação (2.1) foi apresentada uma representação estocástica para uma variável aleatória T com distribuição $BS(\alpha, \beta)$ em base a uma variável aleatória $Z \sim N(0, 1)$. Nesta seção em lugar da distribuição normal padrão consideraremos $Z \sim NIG(\mu, \omega, \delta, \tau)$. Relembrando que uma variável aleatória Z com distribuição NIG aceita a seguinte representação estocástica

$$Z = \mu + \omega U + \sqrt{U} Z_0, \quad (2.6)$$

em que $Z_0 \sim N(0, 1)$, U uma variável aleatória positiva com distribuição $IG(\delta, \gamma)$ e Z independente de U . Desta forma uma extensão da distribuição BS considerando a distribuição NIG pode ser obtida, em particular fixando $\mu = 0$ e substituindo (2.6) em (2.1) vamos obter a seguinte representação estocástica de T

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha(\omega U + \sqrt{U} Z_0) + \sqrt{\alpha^2(\omega U + \sqrt{U} Z_0)^2 + 4} \right]^2, \quad (2.7)$$

A fdp de Z pode ser expressada como

$$\phi_{NIG}(z) = \left(\frac{\tau\delta}{\pi} \right) (\delta^2 + z^2)^{1/2} K_1(\tau\sqrt{\delta^2 + z^2}) \exp(\delta\sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega z), \quad z \in \mathbb{R}$$

em que $\tau = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}$ e $K_\lambda(\cdot)$ é a função Bessel de terceiro tipo modificada de ordem λ . A variável aleatória T definida em (2.7) tem uma distribuição BSIG, denotada como $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Se $\omega = 0$ a distribuição se reduz à distribuição BS baseada na distribuição NIG simétrica descrita anteriormente, é dizer,

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha(\sqrt{U} Z_0) + \sqrt{\alpha^2(\sqrt{U} Z_0)^2 + 4} \right]^2,$$

neste caso é denotado como $T \sim BSIGS(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Isto é, $BSIG(\alpha, \beta; 0, \delta, \tau) = BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$.

A apresentação estocástica em (2.7) pode ser útil para simulação de dados e para a implementação do algoritmo EM, que será utilizado para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros nos modelos BSIG.

Teorema 2.3.1. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Então, a fdp de T é dada por*

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta) \\ &= \left(\frac{\tau\delta}{\pi} \right) (\delta^2 + a_t(\alpha, \beta)^2)^{-1/2} K_1(\tau\sqrt{\delta^2 + a_t(\alpha, \beta)^2}) \\ &\quad \exp\left(\delta\sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_t(\alpha, \beta)\right) A_t(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que $\phi_{NIG}(\cdot)$ é a fdp da distribuição NIG($\mu, \omega, \delta, \tau$), $a_t(\alpha, \beta)$ e $A_t(\alpha, \beta)$ são definidas na Equação (2.3).

Demonstração. Seguindo as ideias de Balakrishnan et al. (2009) e Vilca, Balakrishnan e Zeller (2014) e a representação estocástica dada em (2.7), temos que a distribuição de T , dado $U = u$, é a distribuição birnbaum-saunders não-central (BSNC), denotada $T|(U = u) \sim BSNC(\alpha_u, \beta, \omega\sqrt{u})$, com $\alpha_u = \sqrt{u}\alpha$, e sua fdp é dada por

$$f_{T|U}(t|u) = \phi(a_t(\alpha_u, \beta) - \omega\sqrt{u}) A_t(\alpha_u, \beta).$$

Assim

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T|U}(t|u) h_U(u) du \\ &= \int_0^\infty \phi(a_t(\alpha_u, \beta) - \omega\sqrt{u}) A_t(\alpha_u, \beta) h_U(u) du \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} \phi(a_t(\alpha_u, \beta) - \omega\sqrt{u}) h_U(u) du A_t(\alpha, \beta) \\ &= \phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

em que $\phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta))$ é a fdp da distribuição NIG avaliada em $z = a_t(\alpha, \beta)$. \square

2.3.0.1 Gráficos de densidade

Nas seguintes figuras apresentamos as densidades da BSIG para diferentes valores dos parâmetros, $\alpha = 0.25, 0.5, 1, 1.5$; $\beta = 1$; $\omega = -2, 0, 2$, $\delta = 1$ e $\tau = 5$, a escolha destes parâmetros foi feita em base a [Ramos \(2015\)](#). Nelas podemos observar o comportamento desta distribuição, assim como o efeito do parâmetro ω na distribuição BSIG. Além disso comparamos a densidade BSIG com a BS usual considerando diferentes valores para ω .

Na Figura 14 podemos observar que para valores de $\alpha = 0.25$ o comportamento das densidades da BSIG é bastante semelhantes mostrando que ω tem pouco efeito sobre as densidades neste caso. Para valores de $\alpha > 0.25$ vemos como ω tem um efeito na assimetria da distribuição, uma vez que para $\omega < 0$ se observou uma assimetria maior do que $\omega = 0$, por sua vez quando $\omega > 0$ observa-se uma assimetria próxima do 0. É interessante notar também como o parâmetro ω afeta a curtose da densidade BSIG, uma vez que se $\omega < 0$ a densidade BSIG parece ter uma maior curtose do que a BS usual, o contrario acontece quando $\omega > 0$. Mostrando assim que a distribuição BSIG é mais flexível do que a BS usual e ajusta melhor os dados próximos a 0.

2.3.1 Propriedades da Distribuição BSIG

Nesta seção vamos discutir algumas propriedades da distribuição BSIG. Como foi discutido anteriormente a distribuição BSIG esta diretamente relacionada com a distribuição NIG, vide a representação estocástica dada em (2.7). Esta relação é muito importante para estabelecer propriedades da distribuição BSIG como será discutida no seguinte teorema.

Teorema 2.3.2. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Então*

- i) $aT \sim BSIG(\alpha, a\beta; \omega, \delta, \tau)$;*
- ii) $T^{-1} \sim BSIG(\alpha, \beta^{-1}; -\omega, \delta, \tau)$;*
- iii) $\lim_{\tau \rightarrow 0} f_T(t) = f_c(t)$, em que $f_c(t)$ denota a distribuição BS baseada na distribuição cauchy, vide [Ramos \(2015\)](#);*
- iv) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_T(t) = f_{BS}(t)$, em que $f_{BS}(t)$ denota a distribuição BS usual.*

Demonstração. As Partes i) e ii) são herdadas da distribuição BS e obtidas da aplicação do método de mudança de variável, [Ramos \(2015\)](#). As Partes iii) e iv) se decorrem das propriedades da densidade da NIG quando $\tau \rightarrow 0$ e $\tau \rightarrow \infty$, respectivamente. \square

Observação 2.3.3. *A Parte i) do teorema anterior diz que a distribuição BSIG pertence à família tipo escala, em quanto a Parte ii) do mesmo teorema, diz que o recíproco da distribuição BSIG esta na mesma classe de distribuições.*

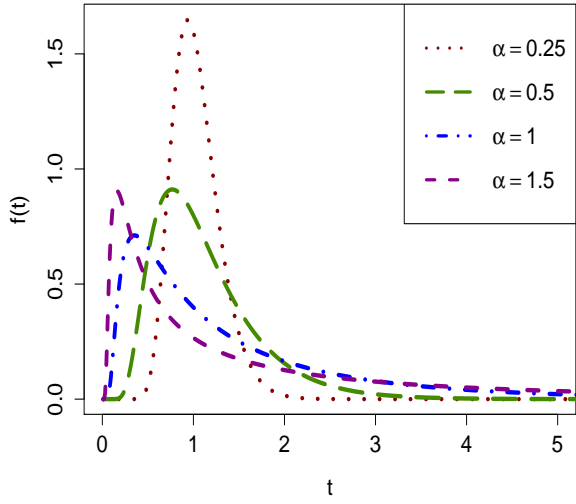
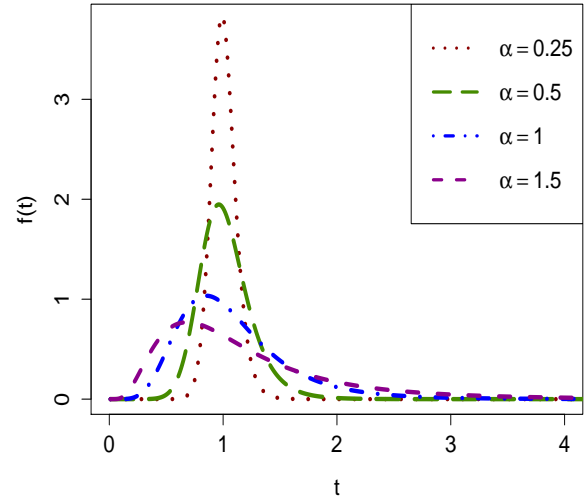
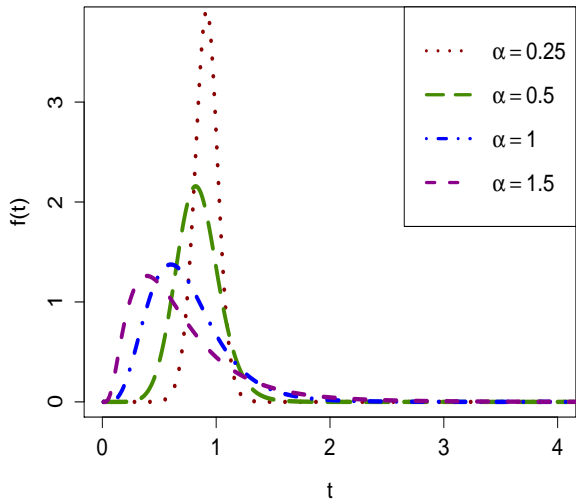
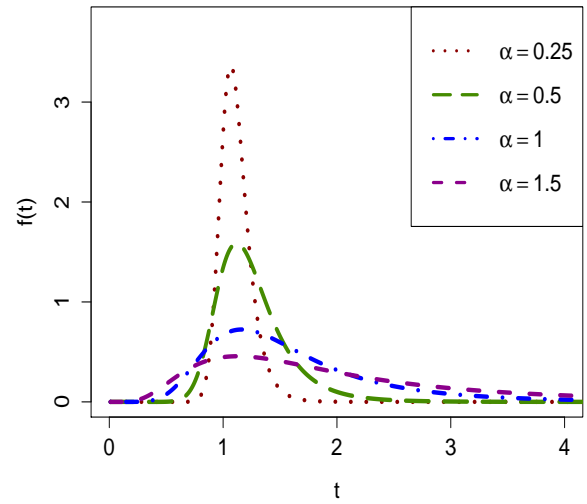
(a) fdp da distribuição $BS(\alpha, 1)$ (b) fdp da distribuição $BSIG(\alpha, 1; 0, 1, 5)$ (c) fdp da distribuição $BSIG(\alpha, 1; -2, 1, 5)$ (d) fdp da distribuição $BSIG(\alpha, 1; 2, 1, 5)$

Figura 14 – fdp das distribuições $BS(\alpha, \beta)$ e $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$, para diferentes valores de α .

Teorema 2.3.4. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$ e denotemos por $F_T(t; \alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$ sua fda. Usaremos também $\Phi_{NIG}(\cdot; \omega, \delta, \tau)$ para denotar a fda associada à NIG. Então*

$$i) F_t(t; \alpha, \beta; \omega, \delta, \tau) = \Phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta); \omega, \delta, \tau);$$

$$ii) F_t(t; \alpha, \beta; -\omega, \delta, \tau) = 1 - F_W(1/t; \omega, \delta, \tau), \text{ com } W \sim BSIG(\alpha, 1/\beta; \omega, \delta, \tau).$$

Demonstração. .

Parte i)

$$\begin{aligned} F_t(t; \alpha, \beta; \omega, \delta, \tau) &= \int_0^t \phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta)) \frac{d}{dx} a_x(\alpha, \beta) dx \\ &= \int_{-\infty}^{a_t(\alpha, \beta)} \phi_{NIG}(x) dx \\ &= \Phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta); \omega, \delta, \tau); \end{aligned}$$

Parte ii) Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; -\omega, \delta, \tau)$, e $W = 1/T \sim BSIG(\alpha, 1/\beta; \omega, \delta, \tau)$,

$$\begin{aligned} F_t(t; \alpha, \beta; -\omega, \delta, \tau) &= P(T \leq t) \\ &= P(1/T \geq 1/t) \\ &= 1 - P(W < 1/t) \\ &= 1 - F_W(1/t; \omega, \delta, \tau). \end{aligned}$$

□

Observação 2.3.5. *Seguindo o Teorema 2.3.4, na Parte i) e as ideias de [Chang e Tang \(1994\)](#) e [Vilca e Leiva \(2006\)](#), o p -ésimo percentil da distribuição, $t_p = F_T^{-1}(p; \alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$ é dado por*

$$t_p = \frac{\beta}{4} \left(\alpha z_p + \sqrt{\alpha^2 z_p^2 + 4} \right)^2,$$

em que z_p é o p -ésimo percentil da distribuição NIG. Para $\omega = 0$, quando a NIG é simétrica $t_{0.5} = \beta$.

Teorema 2.3.6. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Então*

$$E[T^n] = \beta^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{l=0}^k 2^k \binom{k}{l} E \left[\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^{k+l} \left(\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{k-l}{2}} \right].$$

Alguns casos especiais para esta distribuição são:

$$\begin{aligned}
E[T] &= \frac{\beta}{2} (2 + E[Z^2]\alpha^2 + \alpha E[Z(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}]), \\
E[T^2] &= \frac{\beta^2}{2} (2 + 4\alpha^2 E[Z^2] + \alpha^4 E[Z^4] + 2\alpha E[Z(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}] + \alpha^3 E[Z^3(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}]), \\
E[T^3] &= \frac{\beta^3}{2} (2 + 9E[Z^2]\alpha^2 + 6E[Z^4]\alpha^4 + E[Z^6]\alpha^6 + 3\alpha E[Z(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}] \\
&\quad + 4\alpha^3 E[Z^3(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}] + \alpha^5 E[Z^5(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}]), \\
E[T^4] &= \frac{\beta^4}{2} (2 + 16E[Z^2]\alpha^2 + 20E[Z^4]\alpha^4 + 8E[Z^6]\alpha^6 + E[Z^8]\alpha^8 + 4\alpha E[Z(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}] \\
&\quad + 10\alpha^3 E[Z^3(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}] + 6\alpha^5 E[Z^5(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}] + \alpha^7 E[Z^7(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2}]),
\end{aligned}$$

em que

$$E[Z^{2k}] = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \omega^j v_{k+0.5j} E[Z_0^{2k-j}],$$

com $v_r = \frac{K_{-1/2+r}(\delta\gamma)}{K_{-1/2}(\delta\gamma)} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^r$ e $E[Z_0^{2k-j}]$ é $(2k-j)$ -ésimo momento da distribuição normal padrão.

2.3.2 Distribuição de vida associada com o modelo BSIG

Nesta seção, estudaremos a taxa de falha da distribuição BSIG e algumas de suas propriedades, seguindo as ideias de [Vilca e Leiva \(2006\)](#). Além disso, estudaremos as distribuições do máximo, mínimo e confiabilidade da força de estresse quando as variáveis aleatórias são independentes e identicamente distribuídas de uma distribuição BSIG.

Teorema 2.3.7. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$ e F_T sua fda. Então, a confiabilidade e a função de risco de T são respectivamente*

$$\text{A confiabilidade de } T \text{ é: } R_T(t; \omega, \delta, \tau) = 1 - \Phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta); \omega, \delta, \tau);$$

$$\text{A função de risco de } T \text{ é: } h_T(t; \alpha, \beta) = \frac{\phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta))}{1 - \Phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta); \omega, \delta, \tau)} A_t(\alpha, \beta).$$

Demonstração. Usando as definições de confiabilidade e função de risco, veja-se [Meeker e Escobar \(2014\)](#), $R_T(t; \omega, \delta, \tau) = 1 - F_T(t; \omega, \delta, \tau)$ e $h_T(t; \omega, \delta, \tau) = f_T(t)/R_T(t; \omega, \delta, \tau)$, respectivamente, podem-se obter os resultados acima mencionados. \square

Teorema 2.3.8. *Sejam T_1 e T_2 duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$, e sejam $W_1 = \min\{T_1, T_2\}$, $W_2 = \max\{T_1, T_2\}$ e $R = P(T_1 < T_2)$. Então*

i) As fdps de W_1 e W_2 , são respectivamente

$$f_{W_1} = 2\phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau) A_t(\alpha, \beta) \Phi_{NIG}(-a_t; -\omega, \delta, \tau)$$

e

$$f_{W_1} = 2\phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau) A_t(\alpha, \beta) \Phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau);$$

ii) $R = \frac{1}{2}.$

Demonstração. i) Para obter a fdp de W_1 , temos que

$$\begin{aligned} F_{W_1}(t) &= P(W_1 \leq t) = 1 - P(W_1 > t) \\ &= 1 - P(T_1 > t, T_2 > t) \\ &= 1 - (1 - F_T(t))^2. \end{aligned}$$

Então, derivando a expressão acima,

$$\begin{aligned} f_{W_1}(t) &= 2(1 - F_T(t)) f_T(t) \\ &= 2(1 - \Phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau)) \phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau) A_t(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Como $\Phi_{NIG}(-z; -\omega, \delta, \tau) = 1 - \Phi_{NIG}(z; \omega, \delta, \tau)$, $z \in \mathbb{R}$, então podemos escrever $1 - \Phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau) = \Phi_{NIG}(-a_t; -\omega, \delta, \tau)$. Portanto

$$f_{W_1}(t) = \Phi_{NIG}(-a_t; -\omega, \delta, \tau) \phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau) A_t(\alpha, \beta).$$

Analogamente, para W_2 , temos que

$$\begin{aligned} F_{W_2}(t) &= P(W_2 \leq t) = P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) \\ &= F_T(t)^2. \end{aligned}$$

Então, derivando a expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} f_T(t) &= 2F_T(t) f_T(t) \\ &= \Phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau) \phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau) A_t(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
R &= \int_0^\infty \int_{t_1}^\infty f_{T_1}(t_1) f_{T_2}(t_2) dt_2 dt_1 \\
&= \int_0^\infty f_{T_1}[1 - F_{T_2}(t_1)] dt_1 \\
&= 1 - \int_0^\infty f_T(t_1) F_T(t) dt \\
&= 1 - \int_0^\infty \phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau) \Phi_{NIG}(a_t; \omega, \delta, \tau) A_t(\alpha, \beta) dt \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

O seguinte resultado serão úteis para a implementação do algoritmo de estimação EM.

Teorema 2.3.9. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Então*

i) $U|(T = t) \sim GIG(-1, \sqrt{a_t^2 + \delta^2}, \tau)$;

ii) *O momento de ordem r de $U|(T = t)$ é dado por*

$$E[U^r|T = t] = \frac{K_{r-1}(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2})}{K_{-1}(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2})} \left(\frac{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}{\tau} \right)^r, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Para o caso especial $r = -1$ e $r = 1$, temos

$$E[U^{-1}|T = t] = \frac{K_2(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2})}{K_1(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2})} \frac{\tau}{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}$$

e

$$E[U|T = t] = \frac{K_0(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2})}{K_1(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2})} \frac{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}{\tau},$$

Demonstração. Ambos resultados são obtidos usando propriedades da distribuição IG. Primeiramente, a função de densidade condicional de U , dado $T = t$, é dada por

$$\begin{aligned}
h_{U|T}(u|t) &= \frac{\phi(a_t(\sqrt{u}\alpha, \beta)) A_t(\sqrt{u}\alpha, \beta) h_U(u)}{\phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta)} \\
&= \frac{\phi(\frac{1}{\sqrt{u}}a_t(\alpha, \beta)) h_U(u)}{\sqrt{u} \phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta))} \\
&= \left(\frac{\tau}{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}} \right)^{-1} \frac{u^{-2}}{2K_{-1}(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{a_t^2 + \delta^2}{u} + \tau^2 u \right) \right\}.
\end{aligned}$$

□

Assim, $U|T = t \sim GIG(-1, \sqrt{a_t^2 + \delta^2}, \tau)$. Além disso, do resultado em (2.9), temos para $r = -1$ e $r = 1$ os valores esperados condicionais.

2.4 Algoritmo EM

O algoritmo EM é uma ferramenta muito importante para a estimação de máxima verossimilhança, quando temos dados não observados, ou quando variáveis latentes estão presentes durante a modelagem. O algoritmo EM permite uma determinação computacional eficiente das estimativas de máxima verossimilhança quando são necessários procedimentos iterativos.

Seja $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)^\top$ dados observados e seja $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$ dados não observados, sendo assim os dados completos definidos como $\mathbf{t}_c = (\mathbf{t}^\top, \mathbf{u}^\top)^\top$, os quais correspondem aos dados originais de \mathbf{t} e os dados não observados \mathbf{u} .

A seguir detalharemos a implementação das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição BSIG para o caso simétrico e assimétrico usando o algoritmo EM.

O critério de convergência utilizado para o algoritmo EM em todos os caso será quando $\left| \frac{\ell(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)})}{\ell(\boldsymbol{\theta}^{(k)})} - 1 \right| < 10^{-6}$.

2.4.1 Caso simétrico

Seja T_1, \dots, T_n uma amostra aleatória de tamanho n de $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$, onde o vetor de parâmetros é $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\top$ e $\boldsymbol{\nu} = (\delta, \gamma)^\top$, seja $\ell_c = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c)$ a função de verossimilhança dos dados completos e $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c) | \mathbf{t}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}]$ seu valor esperado condicionado nos dados observados.

Cada iteração do algoritmo EM envolve duas etapas, as quais são: a etapa de expectativa ou Etapa E e a etapa de maximização ou Etapa M. Que serão definidas por:

Etapa E: Calcule $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{\nu}}^r)$, para $r = 1, \dots, n$;

Etapa M: Encontre $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r+1)}$ e $\hat{\boldsymbol{\nu}}^{(r+1)}$, tal que

$$Q(\boldsymbol{\theta}^{(r+1)}, \boldsymbol{\nu}^{(r+1)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{\nu}}^{(r)}) = \max_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} \in \Theta} Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{\nu}}^{(r)}),$$

para $r = 1, \dots, n$.

Usando o Teorema 2.2.2, a configuração de acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} T_i | (U_i = u_i) &\stackrel{\text{ind}}{\sim} BS(\sqrt{u_i}\alpha, \beta), \\ U_i &\stackrel{\text{ind}}{\sim} IG(\delta, \gamma), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Assim, a função de log-verossimilhança completa associada com $\mathbf{t}_c = (\mathbf{t}^\top, \mathbf{u}^\top)^\top$ é dada por

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c) &= \log \left(\prod_{i=1}^n f_{T,U}(t_i, u_i) \right) \\ &= \log \left(\prod_{i=1}^n f_{T|U}(t_i, u_i) h_U(u_i) \right) \\ &= \log \left(\prod_{i=1}^n (a_{t_i}(\alpha_{u_i}, \beta)) A_{t_i}(\alpha_{u_i}, \beta) \right) + \log \left(\prod_{i=1}^n h_U(u_i) \right) \\ &= \ell_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}_c) + \ell_2(\boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c), \end{aligned} \tag{2.10}$$

em que $\alpha_{u_i} = \sqrt{u_i} \alpha$, e

$$\begin{aligned} \ell_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}_c) &= c_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{a_{t_i}^2(\alpha, \beta)}{u_i} + \sum_{i=1}^n \log(A_{t_i}(\alpha, \beta)), \\ \ell_2(\boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c) &= c_2 + n \log(\delta) + n \delta \gamma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta^2}{u_i} + \gamma^2 u_i \right), \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes que não dependem dos parâmetros.

Assumindo que

$$\hat{u}_i = E[U_i | t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\nu} = \hat{\boldsymbol{\nu}}] \quad \text{e} \quad \hat{v}_i = E[U_i^{-1} | t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\nu} = \hat{\boldsymbol{\nu}}]. \tag{2.11}$$

para $i = 1, \dots, n$, assim a esperança condicional da função de log-verossimilhança completa tem a seguinte forma

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) = Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) + Q_2(\boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}), \tag{2.12}$$

em que

$$Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) = c_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{t_i}^2(\alpha, \beta) \hat{v}_i + \sum_{i=1}^n \log(A_{t_i}(\alpha, \beta)),$$

$$Q_2(\boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) = c_2 + n \log(\delta) + n \delta \gamma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\delta^2 \hat{v}_i + \gamma^2 \hat{u}_i),$$

Derivando $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ em (2.12) com respeito aos parâmetros, α , β , δ e γ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \alpha} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\hat{v}_i}{\alpha^3} a_{t_i}^2(1, \beta) - \frac{1}{\alpha} \right) = 0, \\ \frac{Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \beta} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\hat{v}_i}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} a_{t_i}^2(\alpha, \beta) + \frac{1}{A_{t_i}(\alpha, \beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} A_{t_i}(\alpha, \beta) \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \delta} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\delta} + \gamma - \delta \hat{v}_i \right) = 0, \\ \frac{Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \gamma} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n (\delta - \gamma \hat{u}_i) = 0. \end{aligned}$$

Em seguida, temos a implementação do algoritmo EM para as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição BSIG para o caso simétrico, como se segue:

Etapla E: Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, calcule \hat{u}_i e \hat{v}_i para $i = 1, \dots, n$ usando as equações (2.11);

Etapla M: Passo 1. Fixe $\hat{\beta}^{(r)}$ e atualize $\hat{\alpha}^{(r+1)}$, $\hat{\delta}^{(r+1)}$ e $\hat{\gamma}^{(r+1)}$, o que conduz às seguintes expressões

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{(r+1)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(a_{t_i}(1, \beta^{(r)}) \hat{v}_i^{(r)} \right), \\ \hat{\delta}^{(r+1)} &= n^{1/2} \left[\sum_{i=1}^n \left(\hat{v}_i^{(r)} - \frac{1}{\bar{u}} \right) \right]^{-1/2}, \\ \hat{\gamma}^{(r+1)} &= \frac{\delta^{(r)}}{\bar{u}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

com, $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)} / n$.

Etapla M: Passo 2. Fixe $\hat{\alpha}^{(r+1)}$, $\hat{\delta}^{(r+1)}$ e $\hat{\gamma}^{(r+1)}$ e atualize $\hat{\beta}^{(r)}$ usando,

$$\hat{\beta}^{(r+1)} = \arg \max_{\beta} Q(\hat{\alpha}^{(r+1)}, \beta, \hat{\delta}^{(r+1)}, \hat{\gamma}^{(r+1)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{\nu}}^{(r)}).$$

Este procedimento é iterativo até convergência ser atingida.

2.4.2 Caso assimétrico

Sejam T_1, \dots, T_n uma amostra aleatória de tamanho n de $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$ com $\tau = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}$. A função de log-verossimilhança dos dados completos e seu valor esperado condicionado nos dados observados, são respectivamente dados por $\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c)$ e $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c) | \mathbf{t}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}]$, com $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \omega)^\top$ e $\boldsymbol{\nu} = (\delta, \gamma)^\top$. Igual ao algoritmo EM para a distribuição BSIG, caso simétrico, o algoritmo EM envolve duas etapas; a Etapa E e a Etapa M.

Usando o Teorema 2.3.9, o modelo BSIG pode ser escrita na forma hierárquica como

$$\begin{aligned} T_i | (U_i = u_i) &\sim BSNC(\sqrt{u_i}\alpha, \beta, \omega\sqrt{u_i}), \\ U_i &\sim IG(\delta, \gamma), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A função de log-verossimilhança dos dados completos e seu valor condicionado nos dados observados, são $\ell_c = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c)$ e $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c) | \mathbf{t}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}]$, respectivamente

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c) &= \log \left(\prod_{i=1}^n f_{T,U}(t_i, u_i) \right) \\ &= \log \left(\prod_{i=1}^n f_{T|U}(t_i, u_i) h_U(u_i) \right) \\ &= \log \left(\prod_{i=1}^n (a_{t_i}(\alpha_{u_i}, \beta) - \omega\sqrt{u_i}) A_{t_i}(\alpha_{u_i}, \beta) \right) + \log \left(\prod_{i=1}^n h_U(u_i) \right) \\ &= \ell_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}_c) + \ell_2(\boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c), \end{aligned} \tag{2.15}$$

em que $\alpha_{u_i} = \sqrt{u_i}\alpha$ e

$$\begin{aligned} \ell_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}_c) &= c_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{t_i}^2(\alpha, \beta)}{u_i} - 2\omega a_{t_i}(\alpha, \beta) + \omega^2 u_i \right) - n \log(\alpha\sqrt{\beta}) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta), \\ \ell_2(\boldsymbol{\nu} | \mathbf{t}_c) &= c_2 + n \log(\delta) + n\delta\gamma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta^2}{u_i} + \gamma^2 u_i \right), \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes que não dependem de $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\nu}$, respectivamente.

Assumindo que

$$\hat{u}_i = E[U_i|t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\nu} = \hat{\boldsymbol{\nu}}] \quad \text{e} \quad \hat{v}_i = E[U_i^{-1}|t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\nu} = \hat{\boldsymbol{\nu}}]. \quad (2.16)$$

Segue que a esperança condicional da função de log-verossimilhança completa, tem a forma

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) = Q_1(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) + Q_2(\boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}), \quad (2.17)$$

em que

$$\begin{aligned} Q_1(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) &= c_1 - n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\hat{v}_i a_{t_i}^2(\alpha, \beta) - 2\omega a_{t_i}(\alpha, \beta) + \omega^2 \hat{u}_i), \\ Q_2(\boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}}) &= c_2 + n \log(\delta) + n\delta\gamma - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\hat{v}_i \delta^2 + \gamma^2 \hat{u}_i). \end{aligned}$$

Derivando $Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ com respeito aos parâmetros α , β , ω , δ e γ , temos as seguintes equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \omega} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \omega} = \sum_{i=1}^n \left(a_{t_i}(\alpha, \beta) - \omega \hat{u}_i \right) = 0, \\ \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \alpha} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{t_i}^2(1, \beta) \hat{v}_i}{\alpha^3} - \frac{a_{t_i}(1, \beta) \omega}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) = 0, \\ \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \beta} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left(\omega \frac{\partial a_{t_i}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \hat{v}_i a_{t_i}(\alpha, \beta) \frac{\partial a_{t_i}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{t_i + \beta} \right) = 0, \\ \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \gamma} &= \frac{\partial Q_2(\boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \left(\delta - \gamma \hat{u}_i \right) = 0, \\ \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \delta} &= \frac{\partial Q_2(\boldsymbol{\nu}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\delta} + \gamma - \delta \hat{v}_i \right) = 0. \end{aligned}$$

As equações acima, serão uteis para ajudar a especificar e descrever o algoritmo EM para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição BSIG para o caso assimétrico, como segue:

Etapla E: Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}$ e $\boldsymbol{\nu} = \hat{\boldsymbol{\nu}}^{(r)}$, calcule $\hat{u}_i^{(r)}$ e $\hat{v}_i^{(r)}$, para $i = 1, \dots, n$, usando as equações (2.16);

Etapa M: Passo 1. Fixe $\hat{\beta}^{(r)}$ e atualize $\hat{\alpha}^{(r)}$, $\hat{\omega}^{(r)}$, $\hat{\delta}^{(r)}$ e $\hat{\gamma}^{(r)}$, como segue

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}^{(r+1)} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (a_{t_i}^2(1, \hat{\beta}^{(r)}) \hat{v}_i^{(r)}) - \frac{[\sum_{i=1}^n a_{t_i}(1, \hat{\beta}^{(r)})]^2}{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)}} \right), \\ \widehat{\omega}^{(r+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n a_{t_i}(\hat{\alpha}^{(r)}, \hat{\beta}^{(r)})}{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)}}, \\ \widehat{\delta}^{(r+1)} &= n \left[\sum_{i=1}^n \left(\hat{v}_i^{(r)} - \frac{1}{\bar{u}} \right) \right]^{-1}, \\ \widehat{\gamma}^{(r+1)} &= \frac{\hat{\delta}^{(r)}}{\bar{u}},\end{aligned}\tag{2.18}$$

com $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)} / n$.

Etapa M: Passo 2. Fixe $\hat{\alpha}^{(r+1)}$, $\hat{\omega}^{(r+1)}$, $\hat{\delta}^{(r+1)}$ e $\hat{\gamma}^{(r+1)}$ e atualize $\hat{\beta}^{(r)}$ usando

$$\hat{\beta}^{(r+1)} = \arg \max_{\beta} Q(\hat{\alpha}^{(r+1)}, \beta, \hat{\omega}^{(r+1)}, \hat{\delta}^{(r+1)}, \hat{\gamma}^{(r+1)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{\nu}}^{(r)}).$$

Analogamente ao algoritmo EM para o caso simétrico, este processo é iterativo até convergência.

2.4.3 Caso $U \sim IG(\eta, \eta)$

Sejam T_1, \dots, T_n uma amostra aleatória de tamanho n de $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$. A função de log-verossimilhança dos dados completos e seu valor esperado condicionado nos dados observados, são respectivamente dados por $\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c)$ e $Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c) | \mathbf{t}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}]$, com $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \omega)^\top$. Igual que os casos anteriores do algoritmo, ele envolve dois etapas; a Etapa E e a Etapa M.

Usando o Teorema 2.3.9, o modelo BSIG com $U \sim IG(\eta, \eta)$ pode ser escrita na forma hierárquica como

$$\begin{aligned}T_i | (U_i = u_i) &\sim BSNC(\sqrt{u_i} \alpha, \beta, \omega \sqrt{u_i}), \\ U_i &\sim IG(\eta, \eta), \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

A função de log-verossimilhança dos dados completos e seu valor condicionado nos dados observados, são $\ell_c = (\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c)$ e $Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c) | \mathbf{t}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}]$, respectivamente, em que

$$\begin{aligned}
\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c) &= \log \left(\prod_{i=1}^n f_{T,U}(t_i, u_i) \right) \\
&= \log \left(\prod_{i=1}^n f_{T|U}(t_i, u_i) h_U(u_i) \right) \\
&= \log \left(\prod_{i=1}^n (a_{t_i}(\alpha_{u_i}, \beta) - \omega \sqrt{u_i}) A_{t_i}(\alpha_{u_i}, \beta) \right) + \log \left(\prod_{i=1}^n h_U(u_i) \right) \\
&= \ell_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}_c) + \ell_2(\eta | \mathbf{t}_c),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

em que $\alpha_{u_i} = \sqrt{u_i} \alpha$ e

$$\begin{aligned}
\ell_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}_c) &= c_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{t_i}^2(\alpha, \beta)}{u_i} - 2\omega a_{t_i}(\alpha, \beta) + \omega^2 u_i \right) - n \log(\alpha \sqrt{\beta}) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta), \\
\ell_2(\eta | \mathbf{t}_c) &= c_2 + n \log(\eta) + n\eta^2 - \frac{\eta^2}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{u_i} + u_i \right),
\end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes que não dependem de $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\nu}$, respectivamente.

Assumindo que

$$\hat{u}_i = E[U_i | t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \eta = \hat{\eta}] \quad \text{e} \quad \hat{v}_i = E[U_i^{-1} | t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \eta = \hat{\eta}]. \tag{2.20}$$

Segue que a esperança condicional da função de log-verossimilhança completa, tem a forma

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) = Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) + Q_2(\eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}), \tag{2.21}$$

em que

$$\begin{aligned}
Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) &= c_1 - n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\hat{v}_i a_{t_i}^2(\alpha, \beta) - 2\omega a_{t_i}(\alpha, \beta) + \omega^2 \hat{u}_i), \\
Q_2(\eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) &= c_2 + n \log(\eta) + n\eta^2 - \frac{\eta^2}{2} \sum_{i=1}^n (\hat{v}_i + \hat{u}_i).
\end{aligned}$$

Derivando $Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})$ (2.21) com respeito aos parâmetros α , β , ω e η , temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \omega} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \omega} = \sum_{i=1}^n \left(a_{t_i}(\alpha, \beta) - \omega \hat{u}_i \right) = 0, \\
\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \alpha} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{t_i}^2(1, \beta) \hat{v}_i}{\alpha^3} - \frac{a_{t_i}(1, \beta) \omega}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) = 0, \\
\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \beta} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left(\omega \frac{\partial a_{t_i}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \hat{v}_i a_{t_i}(\alpha, \beta) \frac{\partial a_{t_i}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{t_i + \beta} \right) = 0, \\
\frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \eta} &= \frac{\partial Q_2(\boldsymbol{\nu} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\eta} + 2\eta - \eta(\hat{v}_i + \hat{u}_i) \right) = 0,
\end{aligned}$$

Assim, em seguida, temos o algoritmo EM para a estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição BSIG para o caso em que a distribuição inversa gaussiana é definida da forma $IG \sim (\eta, \eta)$, como segue:

Etapa E: Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}$ e $\eta = \hat{\eta}^{(r)}$, calcule $\hat{u}_i^{(r)}$ e $\hat{v}_i^{(r)}$, para $i = 1, \dots, n$, usando as equações (2.20);

Etapa M: Passo 1. Fixe $\hat{\beta}^{(r)}$ e atualize $\hat{\alpha}^{(r)}$, $\hat{\omega}^{(r)}$ e $\hat{\eta}^{(r)}$, como segue

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}^{(r+1)} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (a_{t_i}^2(1, \hat{\beta}^{(r)}) \hat{v}_i^{(r)}) - \frac{[\sum_{i=1}^n a_{t_i}(1, \hat{\beta}^{(r)})]^2}{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)}} \right), \\
\hat{\omega}^{(r+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n a_{t_i}(\hat{\alpha}^{(r)}, \hat{\beta}^{(r)})}{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)}}, \\
\hat{\eta}^{(r+1)} &= n \left[\sum_{i=1}^n (\hat{v}_i^{(r)} + \hat{u}_i^{(r)}) - 2n \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Etapa M: Passo 2. Fixe $\hat{\alpha}^{(r+1)}$, $\hat{\omega}^{(r+1)}$ e $\hat{\eta}^{(r+1)}$ e atualize $\hat{\beta}^{(r)}$ usando

$$\hat{\beta}^{(r+1)} = \arg \max_{\beta} Q(\hat{\alpha}^{(r+1)}, \beta, \hat{\omega}^{(r+1)}, \hat{\eta}^{(r+1)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}, \hat{\eta}^{(r)}).$$

Igual que o algoritmo EM para os casos anteriores, este processo é iterativo até convergência.

2.4.4 Caso $U \sim IG(\eta, \eta^2)$

Sejam T_1, \dots, T_n uma amostra aleatória de tamanho n de $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$. A função de log-verossimilhança dos dados completos e seu valor esperado condicionado nos dados observados, são respectivamente dadas por $\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c)$ e $Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) =$

$E[\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c) | t, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}]$, com $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \omega)^\top$. Igual que os casos anteriores do algoritmo, ele envolve dois etapas; a Etapa E e a Etapa M.

Usando o Teorema 2.3.9, o modelo BSIG com $U \sim IG(\eta, \eta^2)$ pode ser escrita na forma hierárquica como

$$\begin{aligned} T_i | (U_i = u_i) &\sim BSNC(\sqrt{u_i}\alpha, \beta, \omega\sqrt{u_i}), \\ U_i &\sim IG(\eta, \eta^2), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A função de log-verossimilhança dos dados completos e seu valor condicionado nos dados observados, são $\ell_c = (\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c)$ e $Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) = E[\ell_c(\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c) | \mathbf{t}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}]$, respectivamente, em que

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\theta}, \eta | \mathbf{t}_c) &= \log \left(\prod_{i=1}^n f_{T,U}(t_i, u_i) \right) \\ &= \log \left(\prod_{i=1}^n f_{T|U}(t_i, u_i) h_U(u_i) \right) \\ &= \log \left(\prod_{i=1}^n (a_{t_i}(\alpha_{u_i}, \beta) - \omega\sqrt{u_i}) A_{t_i}(\alpha_{u_i}, \beta) \right) + \log \left(\prod_{i=1}^n h_U(u_i) \right) \\ &= \ell_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}_c) + \ell_2(\eta | \mathbf{t}_c), \end{aligned} \tag{2.23}$$

em que $\alpha_{u_i} = \sqrt{u_i}\alpha$ e

$$\begin{aligned} \ell_1(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{t}_c) &= c_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{t_i}^2(\alpha, \beta)}{u_i} - 2\omega a_{t_i}(\alpha, \beta) + \omega^2 u_i \right) - n \log(\alpha\sqrt{\beta}) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta), \\ \ell_2(\eta | \mathbf{t}_c) &= c_2 + n \log(\eta) + n\eta^3 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\eta^2}{u_i} + \eta^4 u_i \right), \end{aligned}$$

com c_1 e c_2 constantes que não dependem de $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\nu}$, respectivamente.

Assumindo que

$$\hat{u}_i = E[U_i | t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \eta = \hat{\eta}], \quad \text{e} \quad \hat{v}_i = E[U_i^{-1} | t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \eta = \hat{\eta}]. \tag{2.24}$$

Segue que a esperança condicional da função de log-verossimilhança completa, tem a forma

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) = Q_1(\boldsymbol{\theta} | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) + Q_2(\eta | \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}), \tag{2.25}$$

em que

$$\begin{aligned} Q_1(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) &= c_1 - n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\hat{v}_i a_{t_i}^2(\alpha, \beta) - 2\omega a_{t_i}(\alpha, \beta) + \omega^2 \hat{u}_i), \\ Q_2(\eta|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta}) &= c_2 + n \log(\eta) + n\eta^3 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\eta^2 \hat{v}_i + \eta^4 \hat{u}_i). \end{aligned}$$

Derivando $Q(\boldsymbol{\theta}, \eta|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})$ (2.25) com respeito aos parâmetros α , β , ω e η , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \eta|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \omega} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \omega} = \sum_{i=1}^n (a_{t_i}(\alpha, \beta) - \omega \hat{u}_i) = 0, \\ \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \eta|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \alpha} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{t_i}^2(1, \beta) \hat{v}_i}{\alpha^3} - \frac{a_{t_i}(1, \beta) \omega}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right) = 0, \\ \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \eta|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \beta} &= \frac{\partial Q_1(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \left(\omega \frac{\partial a_{t_i}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \hat{v}_i a_{t_i}(\alpha, \beta) \frac{\partial a_{t_i}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{t_i + \beta} \right) = 0, \\ \frac{\partial Q(\boldsymbol{\theta}, \eta|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \eta} &= \frac{\partial Q_2(\eta|\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\eta})}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\eta} + 3\eta^2 - \eta \hat{v}_i + 2\eta^3 \hat{u}_i \right) = 0, \end{aligned}$$

As equações acima, serão uteis para ajudar a especificar e descrever o algoritmo EM para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição BSIG para o caso em que a distribuição gaussiana inversa é definida da forma $IG \sim (\eta, \eta)$, como segue:

Etapla E: Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}$ e $\eta = \hat{\eta}^{(r)}$, calcule $\hat{u}_i^{(r)}$ e $\hat{v}_i^{(r)}$, para $i = 1, \dots, n$, usando as equações (2.24);

Etapla M: Passo 1. Fixe $\hat{\beta}^{(r)}$ e atualize $\hat{\alpha}^{(r)}$, $\hat{\omega}^{(r)}$ e $\hat{\eta}^{(r)}$, como segue

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{(r+1)} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (a_{t_i}^2(1, \hat{\beta}^{(r)}) \hat{v}_i^{(r)}) - \frac{[\sum_{i=1}^n a_{t_i}(1, \hat{\beta}^{(r)})]^2}{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)}} \right), \\ \hat{\omega}^{(r+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n a_{t_i}(\hat{\alpha}^{(r)}, \hat{\beta}^{(r)})}{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)}}, \\ 1 - \hat{\eta}^{(r+1)2} \hat{v}_i^{(r)} + 3\hat{\eta}^{(r+1)3} - 2\hat{\eta}^{(r+1)4} \hat{u}_i^{(r)} &= 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

com $\bar{u}_i^{(r)} = \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^{(r)} / n$ e $\bar{v}_i^{(r)} = \sum_{i=1}^n \hat{v}_i^{(r)} / n$.

Etapa M: Passo 2. Fixe $\hat{\alpha}^{(r+1)}$, $\hat{\omega}^{(r+1)}$ e $\hat{\eta}^{(r+1)}$ e atualize $\hat{\beta}^{(r)}$ usando

$$\hat{\beta}^{(r+1)} = \arg \max_{\beta} Q(\hat{\alpha}^{(r+1)}, \beta, \hat{\omega}^{(r+1)}, \hat{\eta}^{(r+1)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}, \hat{\eta}^{(r)}).$$

Igual que o algoritmo EM para os casos anteriores, este processo é iterativo até convergência.

2.4.5 Valores iniciais

A seguir vamos discutir ao respeito dos valores iniciais que serão considerado na implementação do algoritmo EM descrito anteriormente.

Seja T_1, \dots, T_n amostra aleatória de $T \sim BSIG(\alpha, \beta, \omega; \delta, \tau)$, com $\omega = 0$. Então, vamos considerar os estimadores de momentos para α e β que são úteis para obter os valores iniciais no algoritmo EM. Os estimadores são obtidos seguindo a ideia de [Ng, Kundu e Balakrishnan \(2003\)](#) e são dados por

$$\hat{\alpha}_0 = \left(\frac{2}{v_1} \left[\left(\frac{S}{R} \right)^{1/2} - 1 \right] \right)^{1/2}, \quad \hat{\beta}_0 = (SR)^{1/2}, \quad (2.27)$$

em que, $S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$, $R = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^{-1} \right)^{-1}$ e $v_1 = E(Z^2) = \frac{\delta}{\gamma}$, com $Z \sim NIGS(0, 1; \delta, \gamma)$.

Estes estimadores de α , β são os estimadores de momentos da BS baseada na distribuição NIG simétrica. Para o caso do $BSIG(\alpha, \beta, \omega, \delta, \tau)$, $\omega \neq 0$, para os valores iniciais para α e β , podem ser usados os estimadores de máxima verossimilhança de α e β , sob o modelo BS usual ou as estimativas em (2.27). Tendo as estimativas de $\alpha_0 = \hat{\alpha}$ e $\beta_0 = \hat{\beta}$ considere as variáveis aleatórias $a_T(\alpha, \beta) = Z \sim NIG(0, \omega, \delta, \tau)$, para $i = 1, \dots, n$. Para os casos da BSIG com $U \sim IG(\eta, \eta)$ e BSIG com $U \sim IG(\eta, \eta^2)$ foram considerados os valores iniciais de ω e η usando

$$(\omega_0, \eta_0) = \arg \max \ell(\alpha_0, \beta_0, \omega, \eta),$$

em que $\ell(\cdot)$ é a função de log verossimilhança genuína.

2.5 Matriz de Informação Observada

2.5.1 Caso Simétrico

Seja T_1, \dots, T_n uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$, com fdp dada por

$$f_T(t_i) = \left(\frac{\gamma \delta}{\pi} \right) (\delta^2 + a_{t_i}^2)^{-1/2} K_1(\gamma \sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}) \exp(\delta \gamma) A_{t_i},$$

em que $a_{t_i} = a_{t_i}(\alpha, \beta)$ e $A_{t_i} = A_{t_i}(\alpha, \beta)$ são descritas em (2.3).

Escrevendo a $f_T(t_i)$ como

$$f_T(t_i) = \frac{\gamma^2 \delta}{\pi} \frac{1}{\Lambda_i} K_1(\Lambda_i) \exp(\delta \gamma) A_{t_i}, \quad (2.28)$$

em que $\Lambda_i = \gamma \sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}$.

Então, a função de log-verossimilhança pode ser escrita como, $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta})$, em que

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = c + \log(\gamma^2 \delta) - \log(\Lambda_i) + \log(K_1(\Lambda_i)) + \delta \gamma + \log(A_{t_i}), \quad (2.29)$$

com c é uma constante que não depende dos parâmetros e $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \delta, \gamma)^\top$. Assim, as derivadas de $\ell(\boldsymbol{\theta})$ (2.29), são $\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta}$, $\eta = \alpha, \beta, \delta, \gamma$, em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\Lambda_i} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} + \frac{K'_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} + \frac{1}{A_{t_i}} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi} &= b_\psi - \frac{1}{\Lambda_i} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} + \frac{K'_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

com $\eta = \alpha, \beta$, e $\psi = \delta, \gamma$, em que

$$b_\psi = \begin{cases} \frac{1}{\delta} + \gamma, & \text{se } \psi = \delta, \\ \frac{\delta}{\gamma} + \delta, & \text{se } \psi = \gamma. \end{cases}$$

Das derivadas anteriores pode-se calcular as segundas derivadas como segue

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi}, \quad \eta, \psi = \alpha, \beta, \delta, \gamma$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi} = & \frac{1}{(\Lambda_i)^2} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} - \frac{1}{\Lambda_i} \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \eta \partial \psi} - \left(\frac{K'_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \right)^2 \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} + \frac{K''_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} \\ & + \frac{K'_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \eta \partial \psi} - \frac{1}{A_{t_i}^2} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \eta} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \psi} + \frac{1}{A_{t_i}} \frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \eta \partial \psi}, \quad \eta, \psi = \alpha, \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi} = & \frac{1}{(\Lambda_i)^2} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} - \frac{1}{\Lambda_i} \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \eta \partial \psi} - \left(\frac{K'_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \right)^2 \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} + \frac{K''_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} \\ & + \frac{K'_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \eta \partial \psi}, \end{aligned}$$

com, $\eta = \alpha, \beta$ e $\psi = \delta, \gamma$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi} = & b_{\eta\psi} + \frac{1}{(\Lambda_i)^2} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} - \frac{1}{\Lambda_i} \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \eta \partial \psi} - \left(\frac{K'_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \right)^2 \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} + \frac{K''_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi} \\ & + \frac{K'_1(\Lambda_i)}{K_1(\Lambda_i)} \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \eta \partial \psi}, \end{aligned}$$

com $\eta, \psi = \delta, \gamma$ e

$$b_{\eta\psi} = \begin{cases} -\frac{1}{\delta^2}, & \text{se } \eta = \psi = \delta, \\ 1, & \text{se } \eta = \delta, \psi = \gamma, \\ -\frac{2}{\gamma^2}, & \text{se } \eta = \psi = \gamma. \end{cases}$$

pode-se encontrar as derivadas de a_{t_i} , A_{t_i} , $K_1(\Lambda_i)$, e demais no Anexo 1.

2.5.2 Caso Assimétrico

Seja T_1, \dots, T_n uma variável aleatória de tamanho n da distribuição $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$, em que $\tau = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}$, com fdp dada por

$$f_T(t_i) = \left(\frac{\tau \delta}{\pi} \right) (\delta^2 + a_{t_i}^2)^{-1/2} K_1(\tau \sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}) \exp(\delta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_{t_i}) A_{t_i},$$

em que $a_{t_i} = a_{t_i}(\alpha, \beta)$ e $A_{t_i} = A_{t_i}(\alpha, \beta)$ são descritas em (2.3).

Escrevendo a $f_T(t_i)$ como

$$f_T(t_i) = \frac{\tau^2 \delta}{\pi} \frac{1}{\Delta_{1i}} K_1(\Delta_{1i}) \exp(\Delta_{2i}) A_{t_i}, \quad (2.30)$$

com $\Delta_{1i} = \tau \sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}$ e $\Delta_{2i} = \delta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_{t_i}$.

Assim, a função de log-verossimilhança pode ser escrita como $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta})$, em que

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = c + \log(\tau^2 \delta) - \log(\Delta_{1i}) + \log(K_1(\Delta_{1i})) + \Delta_{2i} + \log(A_{t_i}), \quad (2.31)$$

com, c é uma constante que não depende dos parâmetros e $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \omega, \delta, \gamma)^\top$. Assim, as derivadas de $\ell(\boldsymbol{\theta})$ (2.31) com respeito a $\alpha, \beta, \omega, \delta, \gamma$ são

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta}, \quad \eta = \alpha, \beta, \omega, \delta, \gamma,$$

com,

$$\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta} = -\frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} + \frac{K_1'(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} + \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \eta} + \frac{1}{A_{t_i}} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \eta}, \quad \eta = \alpha, \beta,$$

$$\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi} = b_\psi - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{K_1'(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \psi}, \quad \psi = \omega, \delta, \gamma,$$

e

$$b_\psi = \begin{cases} \frac{2\omega}{\gamma^2 + \omega^2}, & \text{se } \psi = \omega, \\ \frac{1}{\delta}, & \text{se } \psi = \delta, \\ \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}, & \text{se } \psi = \gamma. \end{cases}$$

Das derivadas anteriores pode-se calcular as segundas derivadas como segue

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi}, \quad \eta, \psi = \alpha, \beta, \omega, \delta, \gamma,$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi} = & \frac{1}{(\Delta_{1i})^2} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \psi} - \left(\frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \right)^2 \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \\ & + \frac{K''_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \psi} + \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \eta \partial \psi} \\ & - \frac{1}{(A_{ti})^2} \frac{\partial A_{ti}}{\partial \eta} \frac{\partial A_{ti}}{\partial \psi} + \frac{1}{A_{ti}} \frac{\partial^2 A_{ti}}{\partial \eta \partial \psi}, \quad \eta, \psi = \alpha, \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi} = & \frac{1}{(\Delta_{1i})^2} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \psi} - \left(\frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \right)^2 \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \\ & + \frac{K''_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \psi} + \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \eta \partial \psi} \end{aligned}$$

com, $\eta = \alpha, \beta$ e $\psi = \omega, \delta, \gamma$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \eta \partial \psi} = & b_{\eta\psi} + \frac{1}{(\Delta_{1i})^2} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \psi} - \left(\frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \right)^2 \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \\ & + \frac{K''_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \psi} + \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \eta \partial \psi}, \quad \eta, \psi = \omega, \delta, \gamma, \end{aligned}$$

em que

$$b_{\eta\psi} = \begin{cases} \frac{2\gamma^2 - 2\omega^2}{(\gamma^2 + \omega^2)^2}, & \text{se } \eta = \psi = \omega, \\ -\frac{4\omega\gamma}{(\gamma^2 + \omega^2)^2}, & \text{se } \eta = \omega, \psi = \gamma, \\ -\frac{1}{\delta^2}, & \text{se } \eta = \psi = \delta \\ \frac{2\omega^2 - 2\gamma^2}{(\gamma^2 + \omega^2)^2}, & \text{se } \eta = \psi = \gamma \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

pode-se encontrar as derivadas de a_{ti} , A_{ti} , $K_1(\Delta_{1i})$, e demais no Anexo 1.

2.5.3 Caso $U \sim IG(\eta, \eta)$

Seja T_1, \dots, T_n uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$, com fdp em que $\tau = \sqrt{\eta^2 + \omega^2}$, com fdp dada por

$$f_T(t_i) = \left(\frac{\tau\eta}{\pi} \right) (\eta^2 + a_{ti}^2)^{-1/2} K_1(\tau\sqrt{\eta^2 + a_{ti}^2}) \exp(\eta\sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_{ti}) A_{ti},$$

em que $a_{t_i} = a_{t_i}(\alpha, \beta)$ e $A_{t_i} = A_{t_i}(\alpha, \beta)$ são descritas em (2.3).

Escrevendo a $f_T(t_i)$ como

$$f_T(t_i) = \frac{\tau^2 \eta}{\pi} \frac{1}{\Delta_{1i}} K_1(\Delta_{1i}) \exp(\Delta_{2i}) A_{t_i}, \quad (2.32)$$

com $\Delta_{1i} = \tau \sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}$ e $\Delta_{2i} = \eta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_{t_i}$.

Assim, a função de log-verossimilhança pode ser escrita como $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta})$,

em que

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = c + \log(\tau^2 \eta) - \log(\Delta_{1i}) + \log(K_1(\Delta_{1i})) + \Delta_{2i} + \log(A_{t_i}), \quad (2.33)$$

com c é uma constante que não depende dos parâmetros e $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \omega, \eta)^\top$. Assim, as derivadas de $\ell(\boldsymbol{\theta})$ (2.33) com respeito a $\alpha, \beta, \omega, \eta$ são

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi}, \quad \psi = \alpha, \beta, \omega, \eta,$$

com

$$\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi} = -\frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{K_1'(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \psi} + \frac{1}{A_{t_i}} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \psi}, \quad \psi = \alpha, \beta,$$

$$\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi} = b_\psi - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{K_1'(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \psi}, \quad \psi = \omega, \eta,$$

em que

$$b_\psi = \begin{cases} \frac{2\omega}{\eta^2 + \omega^2}, & \text{se } \psi = \omega, \\ \frac{2\eta}{\eta^2 + \omega^2} + \frac{1}{\eta}, & \text{se } \psi = \eta. \end{cases}$$

Das derivadas anteriores pode-se calcular as segundas derivadas como segue

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho}, \quad \psi, \rho = \alpha, \beta, \omega, \eta,$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho} = & \frac{1}{(\Delta_{1i})^2} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} - \left(\frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \right)^2 \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} \\ & + \frac{K''_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} + \frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} + \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \rho} \\ & - \frac{1}{(A_{ti})^2} \frac{\partial A_{ti}}{\partial \psi} \frac{\partial A_{ti}}{\partial \rho} + \frac{1}{A_{ti}} \frac{\partial^2 A_{ti}}{\partial \psi \partial \rho}, \quad \psi, \rho = \alpha, \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho} = & \frac{1}{(\Delta_{1i})^2} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} - \left(\frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \right)^2 \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} \\ & + \frac{K''_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} + \frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} + \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \rho}, \end{aligned}$$

com, $\psi = \alpha, \beta$ e $\rho = \omega, \eta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho} = & b_{\psi \rho} + \frac{1}{(\Delta_{1i})^2} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} - \left(\frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \right)^2 \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} \\ & + \frac{K''_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} + \frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} + \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \rho}, \quad \psi, \rho = \omega, \eta, \end{aligned}$$

em que

$$b_{\psi \rho} = \begin{cases} \frac{2\eta^2 - 2\omega^2}{(\eta^2 + \omega^2)^2}, & \text{se } \eta = \psi = \omega, \\ -\frac{4\omega\eta}{(\eta^2 + \omega^2)^2}, & \text{se } \eta = \omega, \psi = \eta, \\ \frac{2\omega^2 - 2\eta^2}{(\eta^2 + \omega^2)^2} - \frac{1}{\eta^2}, & \text{se } \psi = \rho = \eta \end{cases}$$

pode-se encontrar as derivadas de a_{ti} , A_{ti} , $K_1(\Delta_{1i})$, e demais no Anexo 1.

2.5.4 Caso $U \sim IG(\eta, \eta^2)$

Seja T_1, \dots, T_n uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$, com fdp, em que $\tau = \sqrt{\eta^4 + \omega^2}$, com fdp dada por

$$f_T(t_i) = \left(\frac{\tau\eta}{\pi} \right) (\eta^2 + a_{ti}^2)^{-1/2} K_1(\tau\sqrt{\eta^2 + a_{ti}^2}) \exp(\eta\sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_{ti}) A_{ti},$$

em que $a_{ti} = a_{ti}(\alpha, \beta)$ e $A_{ti} = A_{ti}(\alpha, \beta)$ são descritas em (2.3).

Escrevendo a $f_T(t_i)$ como

$$f_T(t_i) = \frac{\tau^2 \eta}{\pi} \frac{1}{\Delta_{1i}} K_1(\Delta_{1i}) \exp(\Delta_{2i}) A_{t_i}, \quad (2.34)$$

com $\Delta_{1i} = \tau \sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}$ e $\Delta_{2i} = \eta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_{t_i}$.

Assim, a função de log-verossimilhança pode ser escrita como $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\boldsymbol{\theta})$, em que

$$\ell_i(\boldsymbol{\theta}) = c + \log(\tau^2 \eta) - \log(\Delta_{1i}) + \log(K_1(\Delta_{1i})) + \Delta_{2i} + \log(A_{t_i}), \quad (2.35)$$

com c é uma constante que não depende dos parâmetros e $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \omega, \eta)^\top$. Assim, as derivadas de $\ell(\boldsymbol{\theta})$ (2.35) com respeito a $\alpha, \beta, \omega, \eta$ são

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi}, \quad \psi = \alpha, \beta, \omega, \eta,$$

com

$$\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi} = -\frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{K_1'(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \psi} + \frac{1}{A_{t_i}} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \psi}, \quad \psi = \alpha, \beta,$$

$$\frac{\partial \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi} = b_\psi - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{K_1'(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} + \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \psi}, \quad \psi = \omega, \eta,$$

em que

$$b_\psi = \begin{cases} \frac{2\omega}{\eta^4 + \omega^2}, & \text{se } \psi = \omega, \\ \frac{4\eta^3}{\eta^4 + \omega^2} + \frac{1}{\eta}, & \text{se } \psi = \eta. \end{cases}$$

Das derivadas anteriores pode-se calcular as segundas derivadas como segue

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho}, \quad \psi, \rho = \alpha, \beta, \omega, \eta,$$

em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho} = & \frac{1}{(\Delta_{1i})^2} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} - \left(\frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \right)^2 \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} \\ & + \frac{K''_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} + \frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} + \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \rho} \\ & - \frac{1}{(A_{t_i})^2} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \psi} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \rho} + \frac{1}{A_{t_i}} \frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \psi \partial \rho}, \quad \psi, \rho = \alpha, \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho} = & \frac{1}{(\Delta_{1i})^2} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} - \left(\frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \right)^2 \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} \\ & + \frac{K''_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} + \frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} + \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \rho} \end{aligned}$$

com $\psi = \alpha, \beta$ e $\rho = \omega, \eta$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \psi \partial \rho} = & b_{\psi \rho} + \frac{1}{(\Delta_{1i})^2} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} - \frac{1}{\Delta_{1i}} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} - \left(\frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \right)^2 \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} \\ & + \frac{K''_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \rho} + \frac{K'_1(\Delta_{1i})}{K_1(\Delta_{1i})} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} + \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \rho}, \quad \psi, \rho = \omega, \eta, \end{aligned}$$

em que

$$b_{\psi \rho} = \begin{cases} \frac{2\eta^4 - 2\omega^2}{(\eta^4 + \omega^2)^2}, & \text{se } \eta = \psi = \omega, \\ -\frac{8\omega\eta^3}{(\eta^4 + \omega^2)^2}, & \text{se } \eta = \omega, \psi = \eta, \\ \frac{12\omega^2\eta^2 - 4\eta^6}{(\eta^4 + \omega^2)^2} - \frac{1}{\eta^2}, & \text{se } \psi = \rho = \eta \end{cases}$$

pode-se encontrar as derivadas de a_{t_i} , A_{t_i} , $K_1(\Delta_{1i})$, e demais no Anexo 1.

2.6 Comentários Finais do Capítulo

Neste capítulo apresentamos a distribuição birnbaum saunders e a distribuição birnbaum saunders normal inversa gaussiana considerando diferentes parametrizações. Para cada uma das distribuições foram desenvolvidas algumas de suas propriedades principais. Através de figuras comparamos as formas das densidades destas distribuições em termos de assimetria e curtose. Algoritmos de estimação EM foram desenvolvidos para a estimação dos parâmetros.

3 Estudo de Simulação e Aplicação

3.1 Estudo de Simulação

Para verificar o desempenho do algoritmo EM nos diferentes casos descritos na Seção 2.4, foi realizado um estudo de simulação considerando diferentes cenários. Foram consideradas $M=1000$ réplicas, para diferentes tamanhos de amostra, ($n = 50, 100, 200, 500$), e diferentes valores dos parâmetros. Para cada dos cenários foram calculados

$$\text{A média das estimativas : } \bar{\hat{\theta}} = \sum_{j=1}^M \hat{\theta}_j / M;$$

$$\text{O vício : } RB = \theta - \bar{\hat{\theta}};$$

$$\text{A raiz quadrada do erro quadrático médio : } RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M (\hat{\theta}_j - \bar{\hat{\theta}})^2}{M}}.$$

Foram também considerados três cenários diferentes de acordo aos valores dos parâmetros:

- Cenário 1: $\alpha = 0.5, \beta = 1$,
- Cenário 2: $\alpha = 1, \beta = 1$,
- Cenário 3: $\alpha = 1.5, \beta = 1$.

Nas seguintes tabelas são apresentadas as estimativas com os cenários descritos acima, para diferentes valores de η . Foram simulados dados a partir das distribuições $BSIG(\alpha, \beta, \eta)$ com $IG(\eta, \eta)$, usar-se-á notação $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta)$, e $BSIG(\alpha, \beta, \eta)$ com $IG(\eta, \eta^2)$, usar-se-á notação $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta^2)$, no caso simétrico. Para o caso assimétrico foram simulados a partir das distribuições $BSIG(\alpha, \beta, \omega, \eta, \eta)$ e $BSIG(\alpha, \beta, \omega, \eta, \eta^2)$.

3.1.1 Caso simétrico

i) Nas próximas tabelas apresentaremos os estudos de simulação considerando a distribuição $U \sim IG(\eta, \eta)$ e os Cenários 1-3.

Tabela 1 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$ e $\beta = 1$

n	α	α			β			η		
		Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.4853	0.0147	0.1049	1.0014	0.0014	0.0519	1.0408	0.4408	1.5391
	1	0.9588	0.0412	0.2067	1.0074	0.0074	0.1027	0.9786	0.3786	1.3097
	1.5	1.4380	0.0620	0.3110	1.0140	0.0140	0.1550	0.9780	0.3780	1.2450
100	0.5	0.4958	0.0042	0.0728	1.0009	0.0009	0.0358	0.6761	0.0761	0.2665
	1	0.9878	0.0122	0.1463	1.0073	0.0073	0.0720	0.6780	0.0780	0.2942
	1.5	1.4807	0.0193	0.2184	1.0027	0.0027	0.1048	0.6881	0.0881	0.3488
200	0.5	0.4953	0.0047	0.0529	1.0007	0.0007	0.0240	0.6370	0.0370	0.1567
	1	0.9961	0.0039	0.1080	1.0016	0.0016	0.0491	0.6337	0.0337	0.1385
	1.5	1.4901	0.0099	0.1509	0.9978	0.0022	0.0720	0.6337	0.0337	0.1335
500	0.5	0.4973	0.0027	0.0317	0.9994	0.0006	0.0150	0.6169	0.0169	0.0806
	1	0.9968	0.0032	0.0633	1.0011	0.0011	0.0305	0.6146	0.0146	0.0775
	1.5	1.4965	0.0035	0.0941	1.0019	0.0019	0.0464	0.6078	0.0078	0.0754

Tabela 2 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$ e $\beta = 1$

n	α	α			β			η		
		Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.4893	0.0107	0.0840	1.0013	0.0013	0.0585	1.4999	0.6999	1.9468
	1	0.9828	0.0172	0.1753	1.0045	0.0045	0.1165	1.3919	0.5919	1.6234
	1.5	1.4606	0.0394	0.2483	1.0188	0.0188	0.1718	1.4609	0.8609	1.6831
100	0.5	0.4945	0.0055	0.0612	1.0003	0.0003	0.0401	0.9541	0.1541	0.6102
	1	0.9846	0.0154	0.1161	1.0010	0.0010	0.0785	0.9662	0.1662	0.5790
	1.5	1.4889	0.0111	0.1893	1.0085	0.0085	0.1192	0.9781	0.3781	0.6207
200	0.5	0.4995	0.0005	0.0430	1.0015	0.0015	0.0280	0.8478	0.0478	0.2211
	1	0.9958	0.0042	0.0851	1.0025	0.0025	0.0559	0.8472	0.0472	0.2074
	1.5	1.4885	0.0115	0.1249	1.0066	0.0066	0.0839	0.8607	0.2607	0.2063
500	0.5	0.4987	0.0013	0.0273	0.9996	0.0004	0.0176	0.8182	0.0182	0.1212
	1	0.9974	0.0026	0.0563	1.0011	0.0011	0.0352	0.8186	0.0186	0.1149
	1.5	1.4976	0.0024	0.0829	0.9997	0.0003	0.0527	0.8186	0.2186	0.1160

Nas Tabelas 1 e 2 apresentamos algumas estatísticas de resumo para as estimativas dos parâmetros α , β e $\eta = 0.6, 0.8$. Nelas podemos ver quando o tamanho da amostra aumenta também aumenta a acurácia das estimativas dos três parâmetros, uma vez que o valor do RB vai diminuindo. Isto também é verdade para o RMSE, uma vez que este valor também vai diminuindo quando o tamanho da amostra aumenta. Estas conclusões são válidas para todos os valores de α e η considerados.

Tabela 3 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$ e $\beta = 1$

n	α	α			β			η		
		Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.4934	0.0066	0.0743	1.0033	0.0033	0.0615	1.9769	0.9769	2.3459
	1	0.9744	0.0256	0.1448	0.9997	0.0003	0.1217	2.1416	1.1416	2.3809
	1.5	1.4725	0.0275	0.2270	1.0208	0.0208	0.1928	1.9566	0.9566	2.1662
100	0.5	0.4941	0.0059	0.0532	0.9977	0.0023	0.0451	1.3661	0.3661	1.1819
	1	0.9873	0.0127	0.1102	1.0019	0.0019	0.0873	1.3140	0.3140	0.9761
	1.5	1.4807	0.0193	0.1596	1.0064	0.0064	0.1253	1.3282	0.3282	0.9865
200	0.5	0.4960	0.0040	0.0389	1.0011	0.0011	0.0298	1.1136	0.1136	0.4330
	1	0.9939	0.0061	0.0766	1.0024	0.0024	0.0585	1.1087	0.1087	0.3877
	1.5	1.4888	0.0112	0.1130	1.0080	0.0080	0.0848	1.1210	0.1210	0.4644
500	0.5	0.4998	0.0002	0.0246	1.0001	0.0001	0.0192	1.0291	0.0291	0.1697
	1	0.9958	0.0042	0.0457	1.0025	0.0025	0.0376	1.0436	0.0436	0.1628
	1.5	1.4944	0.0056	0.0721	0.9998	0.0002	0.0536	1.0355	0.0355	0.1639

Tabela 4 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1.5$ e $\beta = 1$

n	α	α			β			η		
		Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.4910	0.0090	0.0639	1.0039	0.0039	0.0663	3.6818	2.1818	3.5635
	1	0.9863	0.0137	0.1258	1.0115	0.0115	0.1349	3.211	1.7110	2.9792
	1.5	1.4609	0.0391	0.1924	1.0143	0.0143	0.1846	3.2697	1.7697	2.8089
100	0.5	0.4956	0.0044	0.0445	1.0029	0.0029	0.0477	2.3931	0.8931	2.0331
	1	0.9937	0.0063	0.0902	1.0008	0.0008	0.0877	2.2556	0.7556	1.7627
	1.5	1.4856	0.0144	0.1341	1.0048	0.0048	0.1297	2.3063	0.8063	1.7207
200	0.5	0.4985	0.0015	0.0323	1	0	0.0328	1.8575	0.3575	1.0563
	1	0.9962	0.0038	0.0617	1.0060	0.0060	0.0625	1.8303	0.3303	0.9263
	1.5	1.4904	0.0096	0.0971	1.0091	0.0091	0.0876	1.8280	0.3280	0.9129
500	0.5	0.4994	0.0006	0.0205	0.9998	0.0002	0.0206	1.6097	0.1097	0.4256
	1	1.0019	0.0019	0.0413	1.0012	0.0012	0.0395	1.5812	0.0812	0.3622
	1.5	1.4932	0.0068	0.0566	1	0	0.0564	1.597	0.097	0.3977

Nas Tabelas 3 e 4 apresentamos os resultados obtidos para o caso em que $\eta = 1, 1.5$. Mais uma vez encontramos como a acurácia das estimativas é maior quando o tamanho da amostra aumenta. É interessante notar como quando $\eta = 1.5$ se obteve uma estimativa média de aproximadamente 3.6 quando o tamanho da amostra é igual a 50 indicando problemas na recuperação deste parâmetro. No entanto a estimativa deste parâmetro quando $n = 500$ já é muito próxima ao valor verdadeiro.

Tabela 5 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 2$ e $\beta = 1$

n	α	α			β			η		
		Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.4914	0.0086	0.0587	1.0053	0.0053	0.0704	4.5176	2.5176	3.9116
	1	0.9898	0.0102	0.1207	1.0037	0.0037	0.1233	4.1041	2.1041	3.2535
	1.5	1.4650	0.0350	0.1752	1.0128	0.0128	0.1799	4.1636	2.1636	3.0947
100	0.5	0.4986	0.0014	0.0412	1.0003	0.0003	0.0483	3.6047	1.6047	2.8239
	1	0.9925	0.0075	0.0815	1.0053	0.0053	0.0912	3.1276	1.1276	2.2657
	1.5	1.4864	0.0136	0.1217	1.0069	0.0069	0.1273	3.1136	1.1136	2.1173
200	0.5	0.4985	0.0015	0.0290	0.9984	0.0016	0.0349	2.7207	0.7207	1.6993
	1	0.9945	0.0055	0.0554	1.0030	0.0030	0.0643	2.5172	0.5172	1.3393
	1.5	1.4923	0.0077	0.0833	1.0057	0.0057	0.0921	2.5449	0.5449	1.3790
500	0.5	0.4984	0.0016	0.0185	0.9982	0.0018	0.0219	2.2238	0.2238	0.7223
	1	0.9987	0.0013	0.0366	1.0019	0.0019	0.0415	2.1639	0.1639	0.6597
	1.5	1.4953	0.0047	0.0544	1.0039	0.0039	0.0548	2.1445	0.1445	0.5877

Tabela 6 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 3$ e $\beta = 1$

n	α	α			β			η		
		Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.4891	0.0109	0.0543	1.0038	0.0038	0.0706	5.9493	2.9493	4.1481
	1	0.9770	0.0230	0.1084	1.0108	0.0108	0.1333	5.3298	2.3298	3.4048
	1.5	1.4710	0.0290	0.1618	1.0185	0.0185	0.1765	5.1596	2.1596	3.1361
100	0.5	0.4956	0.0044	0.0384	1.0004	0.0004	0.0512	4.6409	1.6409	3.1099
	1	0.9946	0.0054	0.0767	1.0008	0.0008	0.0892	4.2625	1.2625	2.5124
	1.5	1.4808	0.0192	0.1142	1.0030	0.0030	0.1251	4.2120	1.2120	2.3990
200	0.5	0.4993	0.0007	0.0273	0.9997	0.0003	0.0340	3.8494	0.8494	2.1172
	1	0.9946	0.0054	0.0537	1.0046	0.0046	0.0626	3.7479	0.7479	1.7867
	1.5	1.4907	0.0093	0.0782	1.0047	0.0047	0.0857	3.6775	0.6775	1.6383
500	0.5	0.4990	0.0010	0.0170	0.9993	0.0007	0.0218	3.3877	0.3877	1.2950
	1	0.9971	0.0029	0.0345	1.0007	0.0007	0.0402	3.2951	0.2951	1.0495
	1.5	1.4959	0.0041	0.0511	1.0036	0.0036	0.0531	3.1534	0.1534	0.8561

Nas Tabelas 5 e 6 apresentamos os resultados obtidos para o caso em que $\eta = 2, 3$. Novamente encontramos problemas na estimação do parâmetro η quando o tamanho da amostra é pequeno, e mais uma vez encontramos como este problema desaparece no caso de $n = 500$. Para os outros parâmetros encontramos resultados semelhantes aos obtidos nas tabelas anteriores.

Nas Figuras 15-18 apresentamos o RB e RMSE das estimativas dos parâmetros para α, β e $\eta = 0.6, 3$. Como foi mencionado nas tabelas anteriores, podemos observar como os RB e RMSE para estes parâmetros decrescem uma vez que o tamanho da amostra vai aumentanado. Nestas figuras foi utilizada a seguinte notação: RB1 e RMSE1 correspondem aos casos em que $\alpha = 0.5$; RB2 e RMSE2 correspondem aos casos em que $\alpha = 1$; RB3 e RMSE3 correspondem aos casos em que $\alpha = 1.5$.

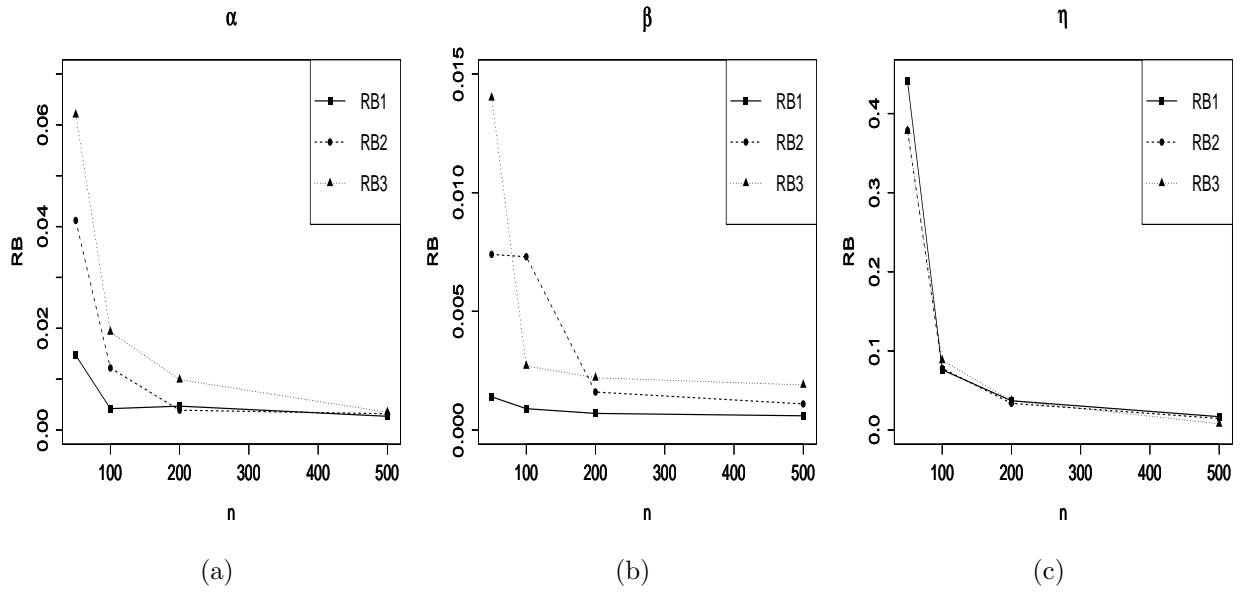


Figura 15 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: RB das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 0.6$.

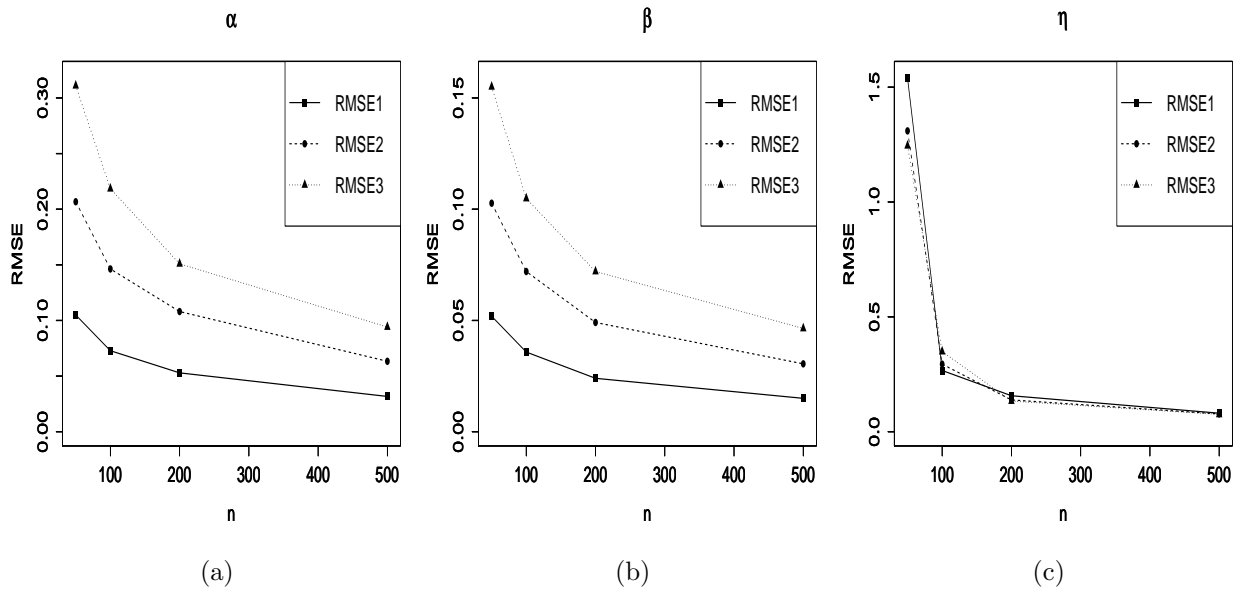


Figura 16 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 0.6$.

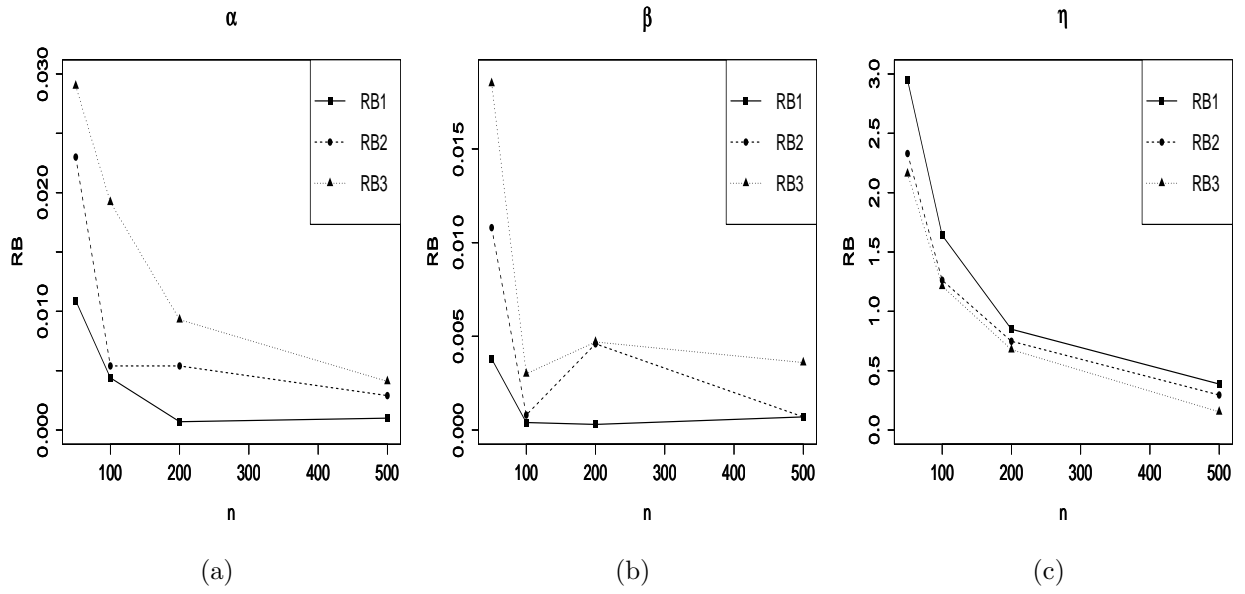


Figura 17 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: RB dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 3$.

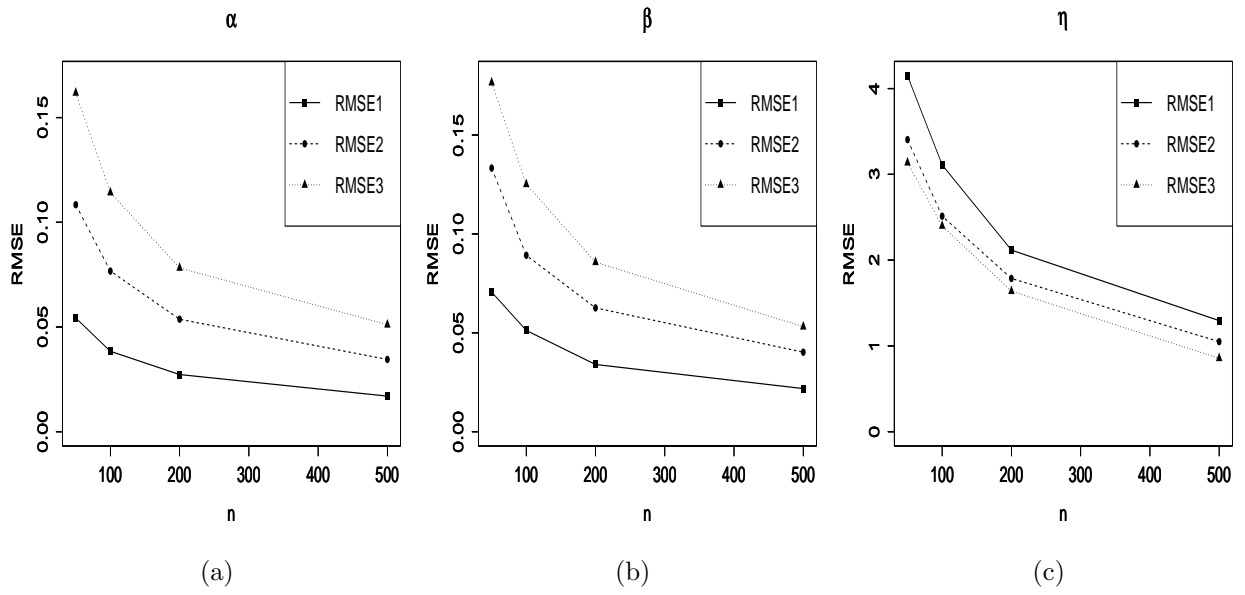


Figura 18 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 3$.

ii) Nos próximas tabelas apresentaremos os estudos de simulação considerando a distribuição $U \sim IG(\eta, \eta^2)$ e os Cenários 1-3.

Tabela 7 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$ e $\beta = 1$

α					β			η		
n	α	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.5010	0.0010	0.0918	1.0011	0.0011	0.0548	0.6955	0.0955	0.3219
	1	0.9933	0.0067	0.1837	1.0092	0.0092	0.1128	0.7115	0.1115	0.3304
	1.5	1.4936	0.0064	0.2767	1.0179	0.0179	0.1712	0.7168	0.1168	0.3341
100	0.5	0.5017	0.0017	0.0610	1	0	0.0388	0.6302	0.0302	0.1450
	1	0.9998	0.0002	0.1198	1.0033	0.0033	0.0760	0.6302	0.0302	0.1351
	1.5	1.5049	0.0049	0.1846	1.0093	0.0093	0.1151	0.6308	0.0308	0.1416
200	0.5	0.4991	0.0009	0.0432	0.9996	0.0004	0.0268	0.6135	0.0135	0.0891
	1	0.9992	0.0008	0.0871	1.0012	0.0012	0.0547	0.6117	0.0117	0.0907
	1.5	1.5012	0.0012	0.1289	1.0052	0.0052	0.0808	0.6167	0.0167	0.0910
500	0.5	0.5003	0.0003	0.0281	0.9999	0.0001	0.0167	0.6047	0.0047	0.0553
	1	0.9999	0.0001	0.0552	1.0014	0.0014	0.0332	0.6036	0.0036	0.0538
	1.5	1.5038	0.0038	0.0836	1.0031	0.0031	0.0515	0.6047	0.0047	0.0529

Tabela 8 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$ e $\beta = 1$

α					β			η		
n	α	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.5192	0.0192	0.0961	1.0030	0.0030	0.0623	0.9778	0.1778	0.4646
	1	1.0371	0.0371	0.1922	1.0078	0.0078	0.1255	0.9664	0.1664	0.4681
	1.5	1.5875	0.0875	0.2969	1.0240	0.0240	0.1867	1.0050	0.2050	0.5034
100	0.5	0.5036	0.0036	0.0561	1.0018	0.0018	0.0426	0.8582	0.0582	0.2299
	1	1.0125	0.0125	0.1165	1.0021	0.0021	0.0874	0.8643	0.0643	0.2333
	1.5	1.5197	0.0197	0.1802	1.0127	0.0127	0.1251	0.8798	0.0798	0.2535
200	0.5	0.5009	0.0009	0.0381	1	0	0.0315	0.8269	0.0269	0.1259
	1	1.0061	0.0061	0.0749	1.0010	0.0010	0.0619	0.8325	0.0325	0.1318
	1.5	1.5037	0.0037	0.1104	1.0021	0.0021	0.0885	0.8309	0.0309	0.1314
500	0.5	0.5001	0.0001	0.0233	0.9999	0.0001	0.0193	0.8078	0.0078	0.0742
	1	1.0010	0.0010	0.0472	0.9989	0.0011	0.0367	0.8073	0.0073	0.0690
	1.5	1.5018	0.0018	0.0700	0.9998	0.0002	0.0549	0.8085	0.0085	0.0703

Nas Tabelas 7 e 8 apresentamos os valores do RB e RMSE para os casos de $\eta = 0.6$ e $\eta = 0.8$ respectivamente. É possível ver como em geral os valores de todos os parâmetros são corretamente recuperados.

Tabela 9 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$ e $\beta = 1$

n	α	α			β			η		
		Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.5404	0.0404	0.1153	1.0013	0.0013	0.0655	1.3142	0.3142	0.6795
	1	1.0843	0.0843	0.2390	1.0132	0.0132	0.1298	1.3237	0.3237	0.6605
	1.5	1.6302	0.1302	0.3318	1.0082	0.0082	0.1771	1.3202	0.3202	0.6223
100	0.5	0.5198	0.0198	0.0762	1.0007	0.0007	0.0454	1.1392	0.1392	0.4315
	1	1.0298	0.0298	0.1379	1.0012	0.0012	0.0852	1.1022	0.1022	0.3584
	1.5	1.5543	0.0543	0.2218	1.0120	0.0120	0.1245	1.1371	0.1371	0.3735
200	0.5	0.5053	0.0053	0.0447	1.0008	0.0008	0.0299	1.0394	0.0394	0.2070
	1	1.0063	0.0063	0.0883	1.0020	0.0020	0.0595	1.0424	0.0424	0.2151
	1.5	1.5162	0.0162	0.1319	1.0047	0.0047	0.0871	1.0430	0.0430	0.2084
500	0.5	0.5038	0.0038	0.0253	1.0011	0.0011	0.0192	1.0203	0.0203	0.1062
	1	1.0026	0.0026	0.0496	1.0005	0.0005	0.0391	1.0114	0.0114	0.1031
	1.5	1.5076	0.0076	0.0751	0.9992	0.0008	0.0542	1.0166	0.0166	0.1044

Tabela 10 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1.5$ e $\beta = 1$

n	α	α			β			η		
		Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.5480	0.0480	0.1205	1.0010	0.0010	0.0554	1.9811	0.4811	0.8350
	1	1.0813	0.0813	0.2301	1.0076	0.0076	0.1110	1.9007	0.4007	0.7886
	1.5	1.6147	0.1147	0.3496	1.0081	0.0081	0.1594	1.9054	0.4054	0.7929
100	0.5	0.5351	0.0351	0.0942	1.0021	0.0021	0.0390	1.8201	0.3201	0.6580
	1	1.0636	0.0636	0.1864	0.9996	0.0004	0.0772	1.7882	0.2882	0.6461
	1.5	1.5856	0.0856	0.2592	1.0070	0.0070	0.1090	1.7657	0.2657	0.5918
200	0.5	0.5191	0.0191	0.0703	1.0011	0.0011	0.0267	1.6685	0.1685	0.4900
	1	1.0337	0.0337	0.1269	1.0029	0.0029	0.0526	1.6306	0.1306	0.4271
	1.5	1.5444	0.0444	0.1893	1.0049	0.0049	0.0752	1.6355	0.1355	0.4069
500	0.5	0.5055	0.0055	0.0409	0.9999	0.0001	0.0173	1.5433	0.0433	0.2551
	1	1.0127	0.0127	0.0776	0.9995	0.0005	0.0331	1.5510	0.0510	0.2433
	1.5	1.5025	0.0025	0.1052	1.0014	0.0014	0.0487	1.5121	0.0121	0.2135

Nas Tabelas 9 e 10 apresentamos os valores do RB e RMSE para os casos de $\eta = 1$ e $\eta = 1.5$ respectivamente. Novamente vemos como ainda para valores pequenos de tamanho de amostra os parâmetros α , β e η são corretamente estimados, um vez que os valores do RB e RMSE para cada caso são próximos de 0.

Tabela 11 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 2$ e $\beta = 1$

n	α				β			η		
	α	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.5132	0.0132	0.1122	1.0011	0.0011	0.0495	2.2434	0.2434	0.8370
	1	1.0394	0.0394	0.2142	1.0088	0.0088	0.0983	2.2997	0.2997	0.8163
	1.5	1.5363	0.0363	0.3103	1.0108	0.0108	0.1354	2.2554	0.2554	0.7731
100	0.5	0.5141	0.0141	0.0876	1.0012	0.0012	0.0365	2.1968	0.1968	0.6917
	1	1.0249	0.0249	0.1651	1.0011	0.0011	0.0656	2.1822	0.1822	0.6349
	1.5	1.4959	0.0041	0.2359	1.0031	0.0031	0.0968	2.0794	0.0794	0.6067
200	0.5	0.5055	0.0055	0.0685	0.9992	0.0008	0.0237	2.0981	0.0981	0.5391
	1	1.0054	0.0054	0.1240	1.0017	0.0017	0.0472	2.0706	0.0706	0.4823
	1.5	1.4972	0.0028	0.1691	1.0060	0.0060	0.0668	2.0429	0.0429	0.4303
500	0.5	0.5008	0.0008	0.0446	0.9997	0.0003	0.0156	2.0237	0.0237	0.3536
	1	0.9874	0.0126	0.0776	1.0020	0.0020	0.0298	1.9770	0.0230	0.3018
	1.5	1.4776	0.0224	0.1044	1.0009	0.0009	0.0420	1.9567	0.0433	0.2639

Tabela 12 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 3$ e $\beta = 1$

n	α				β			η		
	α	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
50	0.5	0.4738	0.0262	0.0881	1.0021	0.0021	0.0420	2.8469	0.1531	0.7885
	1	0.9353	0.0647	0.1660	1.0026	0.0026	0.0764	2.7763	0.2237	0.7326
	1.5	1.4080	0.0920	0.2473	1.0024	0.0024	0.1088	2.7517	0.2483	0.6727
100	0.5	0.4789	0.0211	0.0718	1.0009	0.0009	0.0287	2.8146	0.1854	0.6587
	1	0.9482	0.0518	0.1285	0.9983	0.0017	0.0568	2.7642	0.2358	0.5738
	1.5	1.4082	0.0918	0.1905	1.0027	0.0027	0.0790	2.7410	0.2590	0.5432
200	0.5	0.4830	0.0170	0.0507	1.0001	0.0001	0.0206	2.8413	0.1587	0.4771
	1	0.9571	0.0429	0.0955	0.9987	0.0013	0.0402	2.7909	0.2091	0.4268
	1.5	1.4471	0.0529	0.1250	0.9995	0.0005	0.0563	2.8272	0.1728	0.3494
500	0.5	0.4870	0.0130	0.0317	0.9992	0.0008	0.0129	2.8604	0.1396	0.3045
	1	0.9776	0.0224	0.0514	0.9993	0.0007	0.0248	2.8657	0.1343	0.2096
	1.5	1.4632	0.0368	0.0752	1.0021	0.0021	0.0352	2.8712	0.1288	0.1947

Nas Tabelas 11 e 12 apresentamos os valores do RB e RMSE para os casos de $\eta = 2$ e $\eta = 3$ respectivamente. Diferentemente ao que acontecia quando a distribuição considerada era a $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta)$ vemos como ainda para valores pequenos do tamanho de amostra o parâmetro η é bem estimado. Nas Figuras 19-22 comparamos os valores do RB e RMSE obtidos para os diferentes tamanhos de amostra considerados para $\eta = 0.6, 1$, nelas verificamos as conclusões obtidas anteriormente sobre como o RMSE tende a 0 quando o tamanho da amostra cresce.

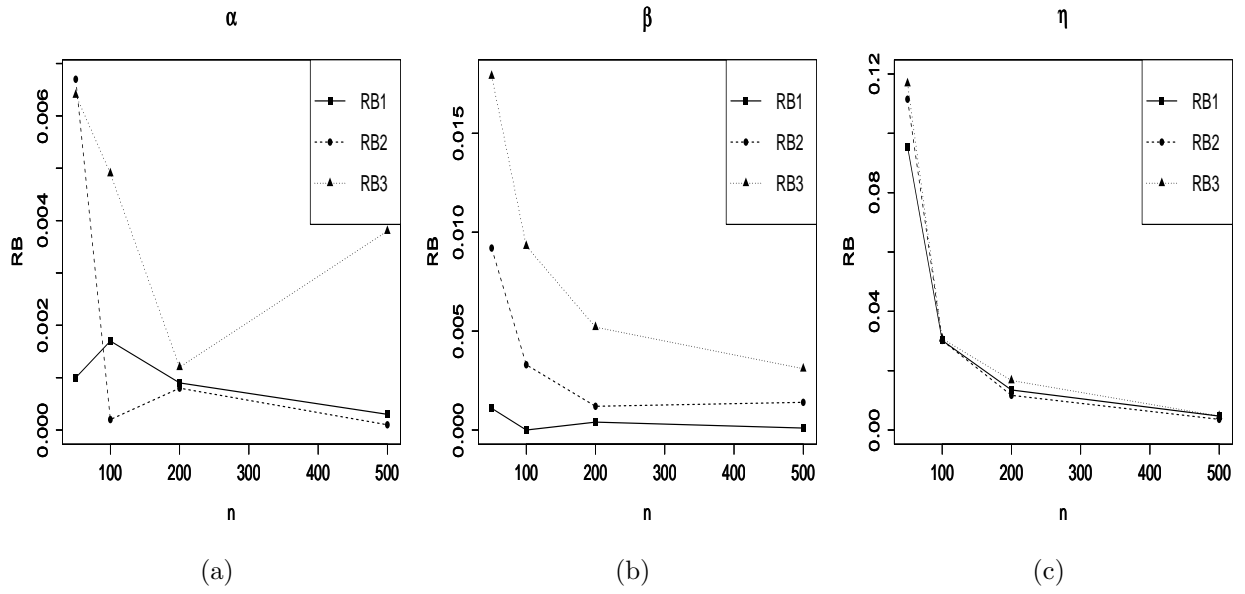


Figura 19 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RB as estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 0.6$.

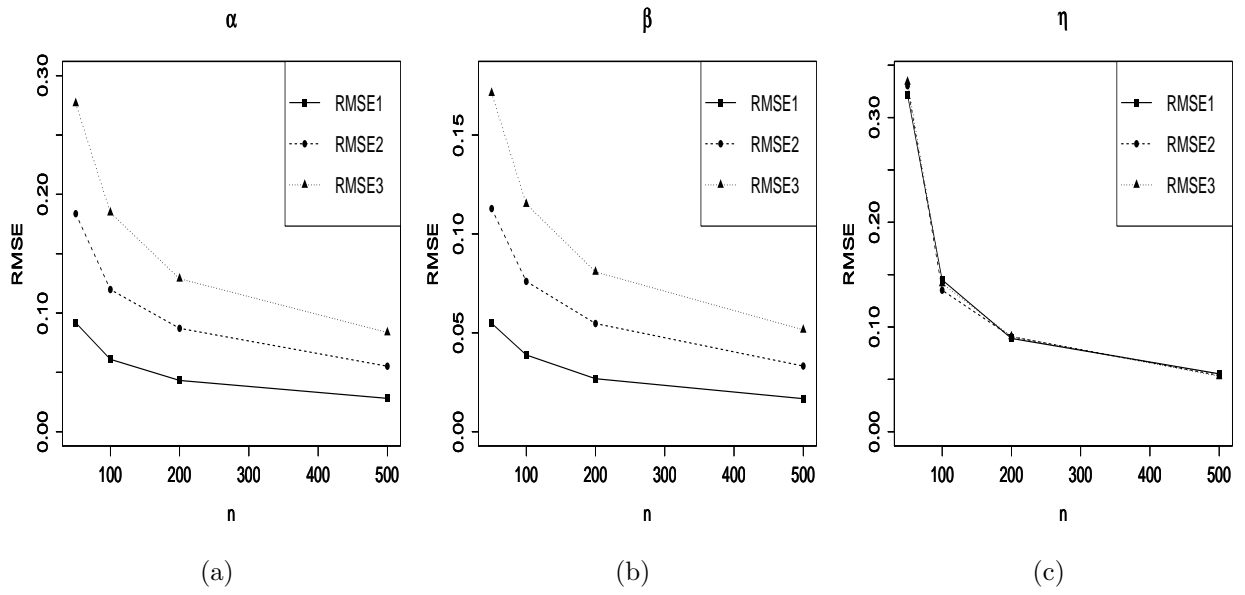


Figura 20 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 0.6$.

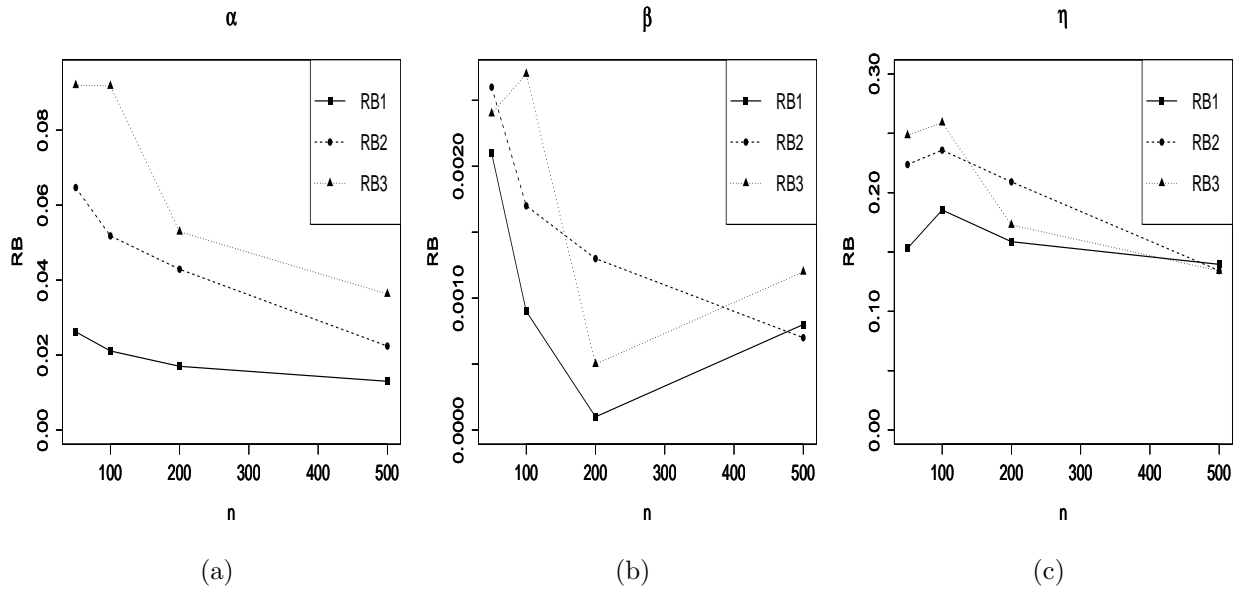


Figura 21 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RB das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 3$.

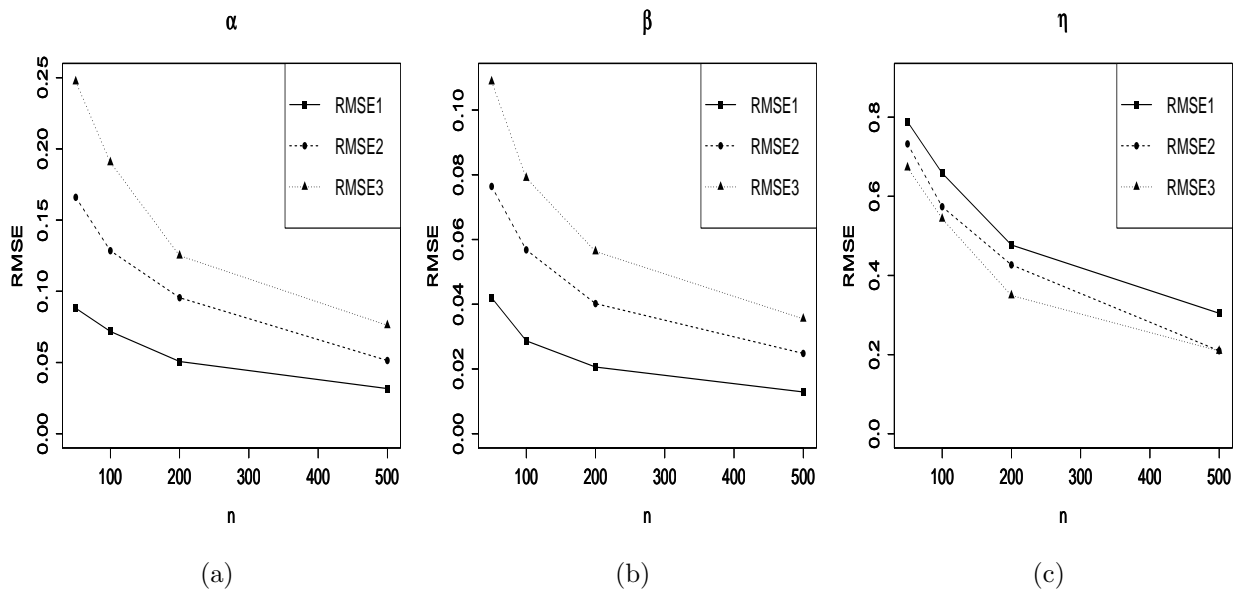


Figura 22 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , β e η , para $\eta = 3$.

3.1.2 Caso assimétrico

i) Nas próximas tabelas apresentamos os estudos de simulação considerando $IG(\eta, \eta)$ e os Cenário 1-3, considerando $\eta = 0.6, 0.8, 1$. Além disso, para $\eta = 0.8$ e $\omega = 1$, é apresentado os resultados graficamente o comportamento do RB e RMSE.

Nas Tabelas 13 e 14 apresentamos a média das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra, $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$. Vemos como para os quatro parâmetros a média das replicas é muito próxima ao valor verdadeiro do parâmetro para todos os tamanhos da amostra. Vemos também como o RB e RMSE se aproxima a 0 quando o tamanho da amostra aumenta. Nas Figuras 23-26 comparamos os valores do RB e RMSE obtidos para os diferentes tamanhos de amostra considerados para $\omega = -0.5$ e $\eta = 0.6$, nelas verificamos as conclusões obtidas anteriormente sobre como o RMSE tende a 0 quando o tamanho da amostra cresce.

Tabela 13 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4595	0.0405	0.1331	0.4478	0.0522	0.1492	0.4451	0.0549	0.1644
β	1.0835	0.0835	0.2351	1.0863	0.0863	0.2171	1.0467	0.0467	0.1651
ω	-0.9449	0.4449	1.4743	-1.7692	0.7692	2.0413	-2.8279	0.8279	2.0475
η	0.7931	0.1931	0.4586	0.7297	0.1297	0.3288	0.6731	0.0731	0.2098
$\alpha(1)$	0.8988	0.1012	0.2499	0.8959	0.1041	0.2833	0.9301	0.0699	0.3670
β	1.2114	0.2114	0.5708	1.1885	0.1885	0.4726	1.0977	0.0977	0.3764
ω	-0.9896	0.4896	1.5338	-1.6886	0.6886	1.7498	-2.7225	0.7225	1.9728
η	0.7828	0.1828	0.4892	0.7121	0.1121	0.3056	0.8981	0.2981	2.3250
$\alpha(1.5)$	1.3774	0.1226	0.3764	1.3470	0.1530	0.4317	1.5709	0.0709	0.7393
β	1.3648	0.3648	0.9846	1.3708	0.3708	0.9287	1.0080	0.0080	0.6987
ω	-0.9015	0.4015	1.3179	-1.7284	0.7284	1.9572	-2.2233	0.2233	2.2791
η	0.7579	0.1579	0.4998	0.8873	0.2873	1.7315	2.9035	2.3035	5.8081
$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4826	0.0174	0.0813	0.4742	0.0258	0.0897	0.4633	0.0367	0.1173
β	1.0216	0.0216	0.0846	1.0333	0.0333	0.1013	1.0280	0.0280	0.1091
ω	-0.5895	0.0895	0.3078	-1.2006	0.2006	0.6562	-2.4573	0.4573	1.2214
η	0.6742	0.0742	0.2127	0.6515	0.0515	0.1690	0.6293	0.0293	0.1290
$\alpha(1)$	0.9671	0.0329	0.1637	0.9505	0.0495	0.1879	0.9365	0.0635	0.2238
β	1.0735	0.0735	0.2360	1.0807	0.0807	0.2560	1.0659	0.0659	0.2517
ω	-0.6254	0.1254	0.4770	-1.2364	0.2364	0.7645	-2.4450	0.4450	1.2801
η	0.6716	0.0716	0.2009	0.6435	0.0435	0.1663	0.6168	0.0168	0.1203
$\alpha(1.5)$	1.4597	0.0403	0.2518	1.4188	0.0812	0.2852	1.4880	0.0120	0.5359
β	1.1632	0.1632	0.5455	1.1764	0.1764	0.5186	1.0624	0.0624	0.4879
ω	-0.6610	0.1610	0.5264	-1.3134	0.3134	0.9328	-2.3449	0.3449	1.6438
η	0.6593	0.0593	0.1987	0.6378	0.0378	0.1523	1.3591	0.7591	3.3571

Tabela 14 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4902	0.0098	0.0573	0.4900	0.0100	0.0636	0.4826	0.0174	0.0808
β	1.0135	0.0135	0.0548	1.0130	0.0130	0.0602	1.0169	0.0169	0.0712
ω	-0.552	0.0520	0.2495	-1.0652	0.0652	0.2719	-2.1980	0.1980	0.6443
η	0.6377	0.0377	0.1359	0.6239	0.0239	0.1093	0.6181	0.0181	0.0877
$\alpha(1)$	0.9873	0.0127	0.1097	0.9811	0.0189	0.1267	0.9622	0.0378	0.1600
β	1.0221	0.0221	0.1068	1.0275	0.0275	0.1381	1.0373	0.0373	0.1616
ω	-0.5434	0.0434	0.1823	-1.0704	0.0704	0.3833	-2.2182	0.2182	0.7172
η	0.6268	0.0268	0.1261	0.6203	0.0203	0.1026	0.6124	0.0124	0.0843
$\alpha(1.5)$	1.4726	0.0274	0.1642	1.4731	0.0269	0.1858	1.4511	0.0489	0.2744
β	1.0489	0.0489	0.2120	1.0464	0.0464	0.2271	1.0778	0.0778	0.3122
ω	-0.5488	0.0488	0.2226	-1.0656	0.0656	0.3351	-2.2474	0.2474	0.9133
η	0.6289	0.0289	0.1179	0.6142	0.0142	0.1008	0.6526	0.0526	0.8108
$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4974	0.0026	0.0352	0.4983	0.0017	0.0408	0.4944	0.0056	0.0488
β	1.0033	0.0033	0.0288	1.0043	0.0043	0.0326	1.0058	0.0058	0.0419
ω	-0.5089	0.0089	0.0970	-1.0241	0.0241	0.1467	-2.0573	0.0573	0.2988
η	0.6120	0.0120	0.0767	0.6066	0.0066	0.0649	0.6063	0.0063	0.0548
$\alpha(1)$	0.9977	0.0023	0.0700	0.9958	0.0042	0.0787	0.9865	0.0135	0.0987
β	1.0058	0.0058	0.0581	1.0076	0.0076	0.0728	1.0098	0.0098	0.0932
ω	-0.5075	0.0075	0.0991	-1.0200	0.0200	0.1642	-2.0561	0.0561	0.3635
η	0.6054	0.0054	0.0695	0.6058	0.0058	0.0662	0.6051	0.0051	0.0517
$\alpha(1.5)$	1.4960	0.0040	0.1053	1.4966	0.0034	0.1174	1.4795	0.0205	0.1459
β	1.0144	0.0144	0.1096	1.0106	0.0106	0.1263	1.0297	0.0297	0.1721
ω	-0.5157	0.0157	0.1260	-1.0162	0.0162	0.1910	-2.0919	0.0919	0.4465
η	0.6079	0.0079	0.0720	0.6058	0.0058	0.0651	0.6039	0.0039	0.0511

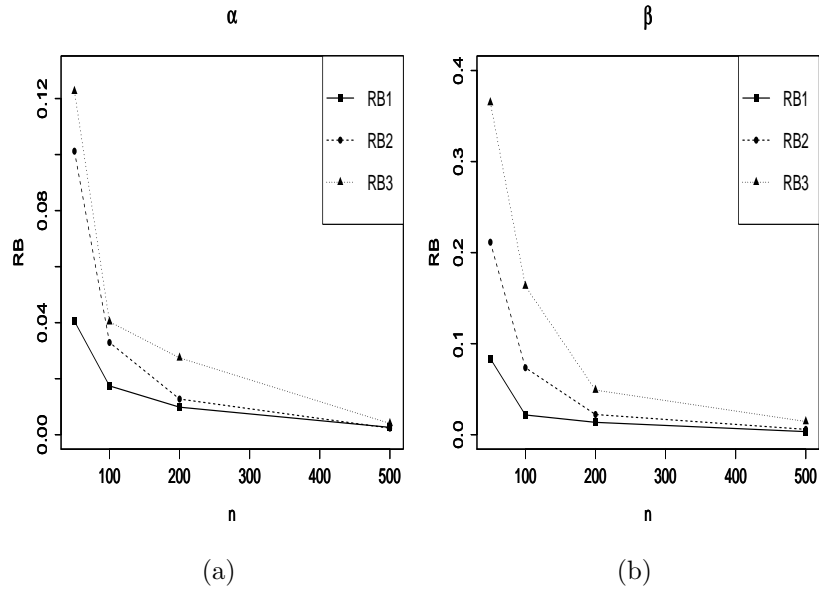


Figura 23 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: RB as estimativas dos parâmetros α , $\beta = 1$, $\omega = -2$ e $\eta = 0.6$.

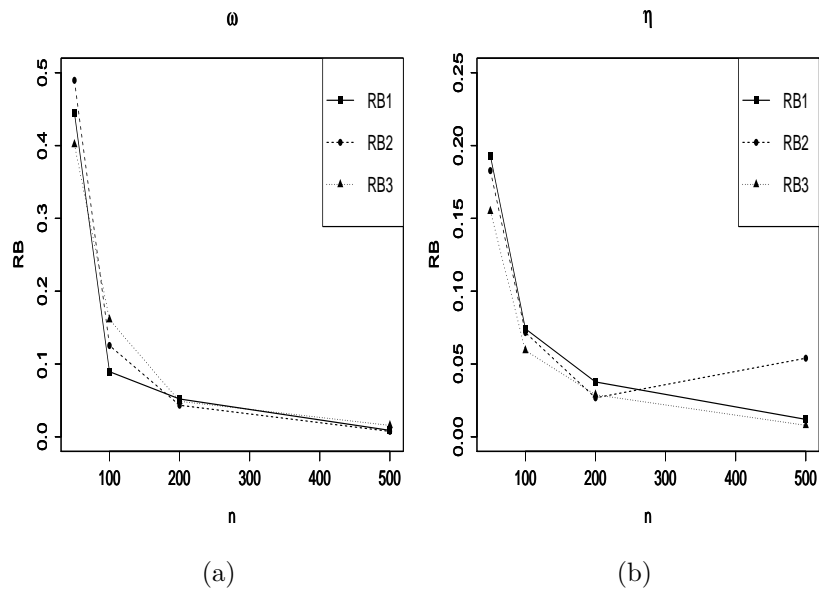


Figura 24 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: RB as estimativas dos parâmetros α , $\beta = 1$, $\omega = -2$ e $\eta = 0.6$.

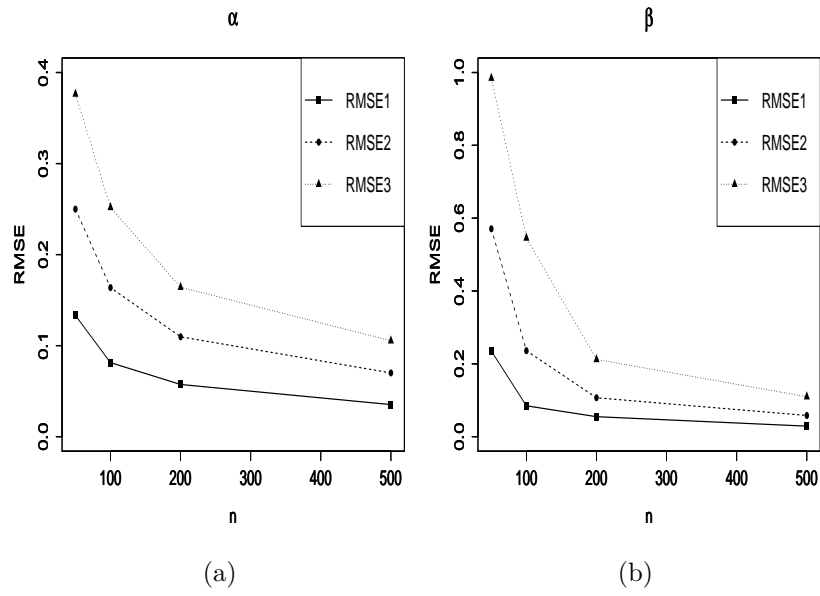


Figura 25 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , $\beta = 1$, $\omega = -2$ e $\eta = 0.6$.

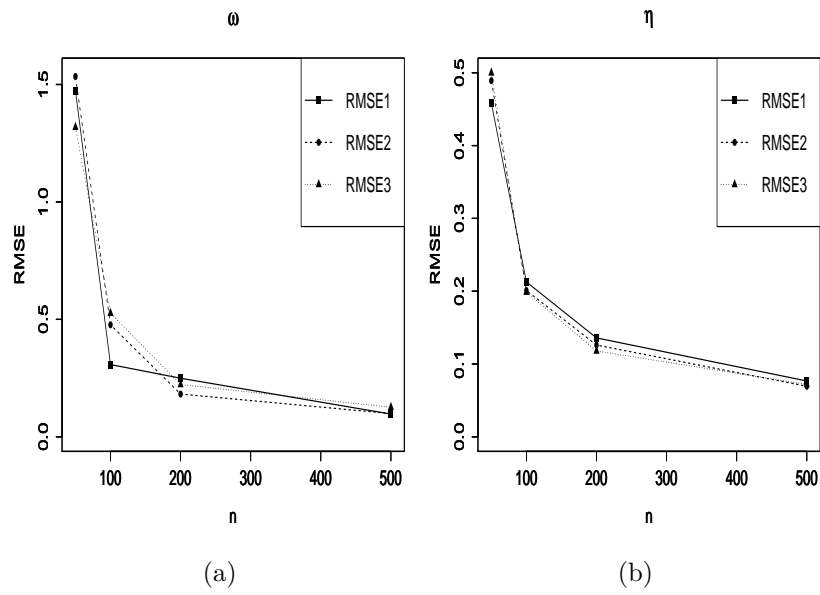


Figura 26 – $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$: RMSE das estimativas dos parâmetros α , $\beta = 1$, $\omega = -2$ e $\eta = 0.6$.

Tabela 15 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4631	0.0369	0.1301	0.4416	0.0584	0.1503	0.4505	0.0495	0.1698
β	0.9561	0.0439	0.1470	0.9461	0.0539	0.1409	0.9776	0.0224	0.1454
ω	0.9045	0.4045	1.3956	1.7964	0.7964	2.0534	2.9561	0.9561	2.2174
η	0.7839	0.1839	0.4609	0.7304	0.1304	0.3152	0.6603	0.0603	0.2155
$\alpha(1)$	0.9167	0.0833	0.2521	0.8976	0.1024	0.2800	0.9004	0.0996	0.3214
β	0.9378	0.0622	0.2517	0.9299	0.0701	0.2622	1.0089	0.0089	0.3704
ω	0.9376	0.4376	1.5385	1.7185	0.7185	1.9303	2.8492	0.8492	2.1260
η	0.7748	0.1748	0.6059	0.7146	0.1146	0.4303	0.6705	0.0705	0.5091
$\alpha(1.5)$	1.3837	0.1163	0.3646	1.3783	0.1217	0.4019	1.3605	0.1395	0.4535
β	0.9826	0.0174	0.4734	0.9967	0.0033	0.4843	1.1117	0.1117	0.6972
ω	0.9106	0.4106	1.4842	1.5951	0.5951	1.8274	2.8207	0.8207	2.1481
η	0.7576	0.1576	0.5850	0.6977	0.0977	0.4786	0.6736	0.0736	0.4474

$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4824	0.0176	0.0841	0.4750	0.0250	0.0943	0.4718	0.0282	0.1170
β	0.9801	0.0199	0.0784	0.9795	0.0205	0.0890	0.9861	0.0139	0.0949
ω	0.6146	0.1146	0.4614	1.1921	0.1921	0.6521	2.3686	0.3686	1.0957
η	0.6725	0.0725	0.2278	0.6517	0.0517	0.1708	0.6322	0.0322	0.1298
$\alpha(1)$	0.9630	0.0370	0.1631	0.9430	0.0570	0.1878	0.9373	0.0627	0.2277
β	0.9779	0.0221	0.1595	0.9511	0.0489	0.1760	0.9828	0.0172	0.2040
ω	0.6208	0.1208	0.5994	1.2628	0.2628	0.7964	2.4159	0.4159	1.2132
η	0.6604	0.0604	0.1947	0.6581	0.0581	0.1665	0.6277	0.0277	0.1226
$\alpha(1.5)$	1.4544	0.0456	0.2557	1.4413	0.0587	0.2657	1.4143	0.0857	0.3460
β	0.9709	0.0291	0.2515	0.9719	0.0281	0.2702	1.0252	0.0252	0.3670
ω	0.6418	0.1418	0.5963	1.2180	0.2180	0.7888	2.4428	0.4428	1.4118
η	0.6539	0.0539	0.1986	0.6340	0.0340	0.1527	0.6143	0.0143	0.1171

Nas Tabelas 15 e 16 apresentamos a media das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra, $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$. De forma semelhante ao que acontecia nas Tabelas 13 e 14 quando considerávamos valores negativos de ω vemos que a média das replicas é muito próxima ao valor verdadeiro do parâmetro para todos os tamanhos da amostra.

Tabela 16 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4922	0.0078	0.0565	0.4902	0.0098	0.0628	0.4857	0.0143	0.0832
β	0.9954	0.0046	0.0479	0.9901	0.0099	0.0545	0.9969	0.0031	0.0704
ω	0.5316	0.0316	0.1740	1.0728	0.0728	0.2677	2.1472	0.1472	0.6599
η	0.6311	0.0311	0.1311	0.6237	0.0237	0.1117	0.6113	0.0113	0.0873
$\alpha(1)$	0.9823	0.0177	0.1132	0.9928	0.0072	0.1248	0.9731	0.0269	0.1581
β	0.9897	0.0103	0.0951	0.9988	0.0012	0.1140	1.0047	0.0047	0.1456
ω	0.5376	0.0376	0.1822	1.0418	0.0418	0.2809	2.1394	0.1394	0.6789
η	0.6311	0.0311	0.1238	0.6141	0.0141	0.1032	0.6076	0.0076	0.0820
$\alpha(1.5)$	1.4739	0.0261	0.1613	1.4734	0.0266	0.1833	1.4572	0.0428	0.2448
β	0.9884	0.0116	0.1606	0.9988	0.0012	0.1922	1.0192	0.0192	0.2422
ω	0.5423	0.0423	0.2242	1.0619	0.0619	0.3374	2.1761	0.1761	0.8044
η	0.6259	0.0259	0.1211	0.6162	0.0162	0.1006	0.6051	0.0051	0.0792

$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4995	0.0005	0.0336	0.4997	0.0003	0.0398	0.4985	0.0015	0.0521
β	0.9995	0.0005	0.0266	1.0012	0.0012	0.0321	1.0018	0.0018	0.0423
ω	0.5036	0.0036	0.0918	1.0075	0.0075	0.1431	2.0253	0.0253	0.3105
η	0.6041	0.0041	0.0695	0.6008	0.0008	0.0671	0.6005	0.0005	0.0555
$\alpha(1)$	1.0017	0.0017	0.0703	0.9955	0.0045	0.0767	0.9999	0.0001	0.0955
β	1.0003	0.0003	0.0569	1.0001	0.0001	0.0712	1.0124	0.0124	0.0900
ω	0.5051	0.0051	0.1000	1.0176	0.0176	0.1652	1.9991	0.0009	0.3328
η	0.6016	0.0016	0.0700	0.6030	0.0030	0.0621	0.6010	0.0010	0.0506
$\alpha(1.5)$	1.4972	0.0028	0.1030	1.4964	0.0036	0.1132	1.5011	0.0011	0.1421
β	1.0029	0.0029	0.0952	1.0053	0.0053	0.1139	1.0348	0.0348	0.1520
ω	0.5059	0.0059	0.1185	1.0120	0.0120	0.1782	1.9904	0.0096	0.3880
η	0.6045	0.0045	0.0674	0.6016	0.0016	0.0606	0.5974	0.0026	0.0474

Tabela 17 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4457	0.0543	0.1266	0.4279	0.0721	0.1502	0.4396	0.0604	0.1768
β	1.1647	0.1647	0.4006	1.1620	0.1620	0.3297	1.0886	0.0886	0.2723
ω	-1.2009	0.7009	1.9423	-2.1884	1.1884	2.5831	-3.3716	1.3716	2.9664
η	1.1054	0.3054	0.7061	0.9975	0.1975	0.5872	0.8784	0.0784	0.2848
$\alpha(1)$	0.9003	0.0997	0.2504	0.8771	0.1229	0.2812	0.9220	0.0780	0.3806
β	1.3852	0.3852	0.9579	1.3306	0.3306	0.7750	1.1600	0.1600	0.6265
ω	-1.1980	0.6980	2.0188	-1.9997	0.9997	2.3621	-3.1742	1.1742	2.9422
η	1.1812	0.3812	1.4552	1.0562	0.2562	1.3340	1.5378	0.7378	3.3858
$\alpha(1.5)$	1.3681	0.1319	0.3333	1.3821	0.1179	0.4120	1.5918	0.0918	0.5643
β	1.4942	0.4942	1.3139	1.3742	0.3742	1.1853	0.8061	0.1939	0.8176
ω	-0.9108	0.4108	1.5508	-1.6306	0.6306	2.2274	-1.6867	0.3133	2.4924
η	1.3340	0.5340	1.8578	1.4840	0.6840	2.4743	3.5611	2.7611	5.2045

$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4798	0.0202	0.0774	0.4674	0.0326	0.1023	0.4458	0.0542	0.1405
β	1.0578	0.0578	0.1884	1.0726	0.0726	0.1963	1.0767	0.0767	0.1953
ω	-0.6898	0.1898	0.6779	-1.4215	0.4215	1.2965	-2.9945	0.9945	2.1831
η	0.9270	0.1270	0.3821	0.8865	0.0865	0.2576	0.8585	0.0585	0.1941
$\alpha(1)$	0.9700	0.0300	0.1541	0.9323	0.0677	0.2026	0.9013	0.0987	0.2760
β	1.1069	0.1069	0.4331	1.1934	0.1934	0.5184	1.1499	0.1499	0.4514
ω	-0.6517	0.1517	0.7271	-1.4916	0.4916	1.4844	-2.9500	0.9500	2.2084
η	0.8783	0.0783	0.3234	0.8626	0.0626	0.2078	0.8801	0.0801	0.9132
$\alpha(1.5)$	1.4262	0.0738	0.2356	1.3941	0.1059	0.3114	1.5429	0.0429	0.4677
β	1.3832	0.3832	1.0070	1.3827	0.3827	0.9962	0.9660	0.0340	0.7454
ω	-0.7894	0.2894	0.8998	-1.5519	0.5519	1.5840	-1.9728	0.0272	2.0348
η	0.9182	0.1182	0.4717	0.9506	0.1506	0.9597	2.1744	1.3744	3.5127

Nas Tabelas 17 e 18 apresentamos a média das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra, $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$. Vemos como houveram problemas na recuperação nos parâmetros η e ω nos casos em que $\alpha = 1.5$ e $\alpha = 0.5$ respectivamente e tamanhos de amostra menores que 200. Para tamanhos de amostra grandes vemos como todos os parâmetros foram corretamente estimados.

Tabela 18 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4938	0.0062	0.0474	0.4879	0.0121	0.0643	0.4763	0.0237	0.0943
β	1.0180	0.0180	0.0777	1.0290	0.0290	0.1070	1.0316	0.0316	0.1252
ω	-0.5521	0.0521	0.2211	-1.1207	0.1207	0.4500	-2.3523	0.3523	1.1179
η	0.8467	0.0467	0.1952	0.8346	0.0346	0.1688	0.8209	0.0209	0.1231
$\alpha(1)$	0.9850	0.0150	0.0969	0.9675	0.0325	0.1299	0.9396	0.0604	0.1879
β	1.0481	0.0481	0.2127	1.0857	0.0857	0.2668	1.1022	0.1022	0.3146
ω	-0.5575	0.0575	0.2728	-1.1715	0.1715	0.5543	-2.4593	0.4593	1.2521
η	0.8388	0.0388	0.1863	0.8301	0.0301	0.1484	0.8179	0.0179	0.1131
$\alpha(1.5)$	1.4666	0.0334	0.1439	1.4614	0.0386	0.1853	1.4825	0.0175	0.3210
β	1.1489	0.1489	0.5177	1.1940	0.1940	0.6037	1.0677	0.0677	0.5684
ω	-0.6091	0.1091	0.3961	-1.2021	0.2021	0.6837	-2.2136	0.2136	1.4854
η	0.8414	0.0414	0.2138	0.8237	0.0237	0.1591	1.1334	0.3334	1.6212
$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4980	0.0020	0.0303	0.4962	0.0038	0.0383	0.4923	0.0077	0.0557
β	1.0048	0.0048	0.0428	1.0041	0.0041	0.0553	1.0074	0.0074	0.0742
ω	-0.5150	0.0150	0.1206	-1.0224	0.0224	0.1953	-2.0808	0.0808	0.4426
η	0.8138	0.0138	0.1062	0.8076	0.0076	0.0952	0.8059	0.0059	0.0779
$\alpha(1)$	0.9956	0.0044	0.0596	0.9940	0.0060	0.0723	0.9763	0.0237	0.1117
β	1.0106	0.0106	0.0965	1.0194	0.0194	0.1285	1.0402	0.0402	0.1787
ω	-0.5137	0.0137	0.1330	-1.0294	0.0294	0.2249	-2.1543	0.1543	0.5818
η	0.8144	0.0144	0.1066	0.8049	0.0049	0.0878	0.8082	0.0082	0.0704
$\alpha(1.5)$	1.4958	0.0042	0.0890	1.4956	0.0044	0.1066	1.4744	0.0256	0.1730
β	1.0264	0.0264	0.2213	1.0388	0.0388	0.2442	1.0643	0.0643	0.3424
ω	-0.5162	0.0162	0.1966	-1.0360	0.0360	0.2866	-2.1477	0.1477	0.7329
η	0.8112	0.0112	0.1017	0.8060	0.0060	0.0885	0.8257	0.0257	0.4233

Tabela 19 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4431	0.0569	0.1270	0.4231	0.0769	0.1521	0.4324	0.0676	0.1723
β	0.9281	0.0719	0.2559	0.9056	0.0944	0.2080	0.9713	0.0287	0.2058
ω	1.3034	0.8034	2.2780	2.2664	1.2664	2.6468	3.3663	1.3663	2.8878
η	1.1265	0.3265	0.8807	0.9972	0.1972	0.4970	0.8684	0.0684	0.2696
$\alpha(1)$	0.8958	0.1042	0.2649	0.8798	0.1202	0.2902	0.8995	0.1005	0.3434
β	0.9535	0.0465	0.5241	0.9605	0.0395	0.4479	1.1842	0.1842	0.8481
ω	1.3653	0.8653	2.4055	2.0914	1.0914	2.6432	3.1505	1.1505	2.8879
η	1.0484	0.2484	0.8355	0.9331	0.1331	0.5573	1.0668	0.2668	1.3173
$\alpha(1.5)$	1.3740	0.1260	0.3582	1.3818	0.1182	0.4108	1.4417	0.0583	0.4823
β	1.1496	0.1496	0.8024	1.4780	0.4780	1.2608	1.7962	0.7962	1.4682
ω	1.0399	0.5399	1.9027	1.6287	0.6287	2.2723	2.5546	0.5546	2.5891
η	1.1591	0.3591	1.3218	1.3212	0.5212	1.7213	1.0712	0.2712	1.1051

$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4759	0.0241	0.0764	0.4649	0.0351	0.1009	0.4559	0.0441	0.1322
β	0.9616	0.0384	0.1285	0.9596	0.0404	0.1402	0.9795	0.0205	0.1501
ω	0.7180	0.2180	0.7363	1.4067	0.4067	1.2654	2.7276	0.7276	1.8430
η	0.9358	0.1358	0.3732	0.8885	0.0885	0.2597	0.8338	0.0338	0.1749
$\alpha(1)$	0.9499	0.0501	0.1553	0.9464	0.0536	0.1953	0.9230	0.0770	0.2608
β	0.9756	0.0244	0.2722	0.9620	0.0380	0.2826	1.0222	0.0222	0.4040
ω	0.7023	0.2023	0.8971	1.3799	0.3799	1.1936	2.7282	0.7282	1.9263
η	0.9056	0.1056	0.4043	0.8542	0.0542	0.2428	0.8260	0.0260	0.3102
$\alpha(1.5)$	1.4404	0.0596	0.2286	1.4186	0.0814	0.2906	1.4266	0.0734	0.3632
β	1.0096	0.0096	0.5021	1.0725	0.0725	0.6794	1.2817	0.2817	0.8932
ω	0.7238	0.2238	0.8250	1.4264	0.4264	1.4195	2.4791	0.4791	1.8671
η	0.8901	0.0901	0.4882	0.8928	0.0928	0.6432	0.8215	0.0215	0.2596

Nas Tabelas 19 e 20 apresentamos a média das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra, $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$. Mais uma vez observamos os problemas nas estimativas dos parâmetros de η e ω para valores pequenos da amostra. Para tamanhos de amostra grandes todos os parâmetros foram corretamente recuperado.

Tabela 20 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.8$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4927	0.0073	0.0496	0.4873	0.0127	0.0639	0.4802	0.0198	0.0916
β	0.9874	0.0126	0.0690	0.9833	0.0167	0.0891	0.9868	0.0132	0.1075
ω	0.5524	0.0524	0.2291	1.1222	0.1222	0.4755	2.2931	0.2931	0.9429
η	0.8494	0.0494	0.1938	0.8366	0.0366	0.1638	0.8181	0.0181	0.1199
$\alpha(1)$	0.9823	0.0177	0.0995	0.9810	0.0190	0.1251	0.9697	0.0303	0.1763
β	0.9811	0.0189	0.1571	0.9890	0.0110	0.1863	1.0231	0.0231	0.2400
ω	0.5649	0.0649	0.2696	1.1272	0.1272	0.5994	2.2271	0.2271	0.9829
η	0.8368	0.0368	0.1770	0.8173	0.0173	0.1490	0.8033	0.0033	0.1079
$\alpha(1.5)$	1.4782	0.0218	0.1494	1.4842	0.0158	0.1828	1.4842	0.0158	0.2514
β	0.9863	0.0137	0.2747	1.0783	0.0783	0.3963	1.1586	0.1586	0.4730
ω	0.5918	0.0918	0.3928	1.0636	0.0636	0.5737	2.1194	0.1194	1.1248
η	0.8208	0.0208	0.1607	0.8059	0.0059	0.1721	0.7874	0.0126	0.0999
$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4979	0.0021	0.0309	0.4997	0.0003	0.0371	0.4986	0.0014	0.0524
β	0.9956	0.0044	0.0412	1.0017	0.0017	0.0522	1.0030	0.0030	0.0658
ω	0.5184	0.0184	0.1216	1.0095	0.0095	0.1872	2.0400	0.0400	0.4015
η	0.8148	0.0148	0.1121	0.8019	0.0019	0.0906	0.8005	0.0005	0.0741
$\alpha(1)$	0.9969	0.0031	0.0594	0.9986	0.0014	0.0726	0.9964	0.0036	0.1011
β	1.0003	0.0003	0.0901	1.0060	0.0060	0.1133	1.0239	0.0239	0.1456
ω	0.5112	0.0112	0.1369	1.0123	0.0123	0.2140	2.0199	0.0199	0.4403
η	0.8050	0.0050	0.1024	0.7970	0.0030	0.0913	0.7952	0.0048	0.0690
$\alpha(1.5)$	1.4985	0.0015	0.0909	1.5033	0.0033	0.1094	1.5134	0.0134	0.1482
β	1.0134	0.0134	0.1628	1.0452	0.0452	0.2058	1.1191	0.1191	0.2954
ω	0.5058	0.0058	0.1704	0.9915	0.0085	0.2727	1.9288	0.0712	0.5423
η	0.7986	0.0014	0.0982	0.7933	0.0067	0.0811	0.7862	0.0138	0.0637

Tabela 21 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4404	0.0596	0.1233	0.4250	0.0750	0.1499	0.4137	0.0863	0.1871
β	1.2506	0.2506	0.5277	1.2183	0.2183	0.4385	1.1498	0.1498	0.3730
ω	-1.4705	0.9705	2.4066	-2.4149	1.4149	2.9055	-4.1565	2.1565	3.7140
η	1.5357	0.5357	1.4998	1.2717	0.2717	0.9489	1.0807	0.0807	0.3365
$\alpha(1)$	0.8911	0.1089	0.2366	0.8738	0.1262	0.2922	0.9733	0.0267	0.3997
β	1.4847	0.4847	1.1733	1.4112	0.4112	1.0200	0.9799	0.0201	0.6972
ω	-1.1976	0.6976	2.2732	-2.1520	1.1520	2.9622	-2.6796	0.6796	3.2026
η	1.6294	0.6294	2.0546	1.5834	0.5834	2.2671	2.9617	1.9617	4.9895
$\alpha(1.5)$	1.3911	0.1089	0.3026	1.4207	0.0793	0.3734	1.5964	0.0964	0.4313
β	1.2182	0.2182	1.2725	1.0425	0.0425	1.2289	0.4934	0.5066	0.6908
ω	-0.5014	0.0014	1.5924	-0.9791	0.0209	2.2474	-0.9268	1.0732	2.3363
η	2.1226	1.1226	2.7809	3.0051	2.0051	4.1103	4.3091	3.3091	4.8593

$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4745	0.0255	0.0793	0.4636	0.0364	0.1078	0.4361	0.0639	0.1460
β	1.1073	0.1073	0.3104	1.1297	0.1297	0.3016	1.1060	0.1060	0.2914
ω	-0.8113	0.3113	0.9955	-1.6087	0.6087	1.6692	-3.2725	1.2725	2.6240
η	1.2150	0.2150	0.5814	1.1282	0.1282	0.3940	1.0585	0.0585	0.2569
$\alpha(1)$	0.9405	0.0595	0.1666	0.9131	0.0869	0.2184	0.9229	0.0771	0.2915
β	1.3308	0.3308	0.9083	1.3389	0.3389	0.8037	1.1491	0.1491	0.5992
ω	-0.8999	0.3999	1.3181	-1.7338	0.7338	1.8783	-2.8952	0.8952	2.4864
η	1.2367	0.2367	1.0487	1.1363	0.1363	0.9642	1.5088	0.5088	2.4520
$\alpha(1.5)$	1.4390	0.0610	0.2148	1.4519	0.0481	0.2722	1.5896	0.0896	0.3621
β	1.3106	0.3106	1.1911	1.1541	0.1541	1.0670	0.6179	0.3821	0.7012
ω	-0.6185	0.1185	1.0066	-1.1012	0.1012	1.5162	-1.1488	0.8512	1.9772
η	1.3281	0.3281	1.2712	1.6154	0.6154	2.0057	2.6973	1.6973	3.2097

Nas Tabelas 21 e 22 apresentamos a média das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra para $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$. Mais uma vez vemos como houveram problemas na recuperação nos parâmetros η e ω para tamanhos de amostra pequenos. Para tamanhos de amostra grandes vemos como os parâmetros foram corretamente estimados.

Tabela 22 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4900	0.0100	0.0466	0.4853	0.0147	0.0630	0.4615	0.0385	0.1099
β	1.0347	0.0347	0.1390	1.0493	0.0493	0.1701	1.0675	0.0675	0.1951
ω	-0.5890	0.0890	0.3327	-1.1866	0.1866	0.6630	-2.6373	0.6373	1.5841
η	1.0788	0.0788	0.3003	1.0558	0.0558	0.2293	1.0384	0.0384	0.1716
$\alpha(1)$	0.9779	0.0221	0.0977	0.9681	0.0319	0.1271	0.9345	0.0655	0.1969
β	1.1311	0.1311	0.4620	1.1495	0.1495	0.4497	1.1572	0.1572	0.4622
ω	-0.6322	0.1322	0.4930	-1.2308	0.2308	0.7279	-2.5905	0.5905	1.5553
η	1.0589	0.0589	0.2390	1.0232	0.0232	0.1931	1.0684	0.0684	0.8065
$\alpha(1.5)$	1.4670	0.0330	0.1390	1.4765	0.0235	0.1798	1.5950	0.0950	0.2669
β	1.2282	0.2282	0.9191	1.1576	0.1576	0.7978	0.6910	0.3090	0.6080
ω	-0.5890	0.0890	0.6450	-1.0922	0.0922	0.8831	-1.2232	0.7768	1.4911
η	1.0757	0.0757	0.4088	1.0798	0.0798	0.5844	1.7099	0.7099	1.6664
$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4966	0.0034	0.0297	0.4964	0.0036	0.0366	0.4886	0.0114	0.0596
β	1.0120	0.0120	0.0702	1.0145	0.0145	0.0853	1.0178	0.0178	0.1028
ω	-0.5324	0.0324	0.1797	-1.0452	0.0452	0.2617	-2.1397	0.1397	0.5593
η	1.0236	0.0236	0.1570	1.0204	0.0204	0.1431	1.0100	0.0100	0.1029
$\alpha(1)$	0.9971	0.0029	0.0564	0.9929	0.0071	0.0719	0.9687	0.0313	0.1246
β	1.0251	0.0251	0.1705	1.0362	0.0362	0.2202	1.0790	0.0790	0.2751
ω	-0.5239	0.0239	0.2049	-1.0503	0.0503	0.3324	-2.2445	0.2445	0.8073
η	1.0068	0.0068	0.1461	1.0031	0.0031	0.1229	1.0077	0.0077	0.0900
$\alpha(1.5)$	1.4909	0.0091	0.0859	1.4908	0.0092	0.1123	1.5580	0.0580	0.1934
β	1.0614	0.0614	0.4359	1.1036	0.1036	0.5213	0.8367	0.1633	0.4762
ω	-0.5221	0.0221	0.3280	-1.0646	0.0646	0.5262	-1.5801	0.4199	1.0921
η	1.0060	0.0060	0.1394	1.0047	0.0047	0.1939	1.2078	0.2078	0.7480

Tabela 23 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4461	0.0539	0.1212	0.4339	0.0661	0.1535	0.4181	0.0819	0.1859
β	0.9599	0.0401	0.4068	0.9222	0.0778	0.2723	0.9636	0.0364	0.3023
ω	1.2888	0.7888	2.3580	2.3247	1.3247	2.8222	4.0285	2.0285	3.6313
η	1.5600	0.5600	1.6060	1.2131	0.2131	0.6460	1.1003	0.1003	0.5324
$\alpha(1)$	0.8875	0.1125	0.2430	0.8774	0.1226	0.2828	0.9167	0.0833	0.3581
β	1.0920	0.0920	0.7810	1.0842	0.0842	0.7290	1.6072	0.6072	1.3405
ω	1.2890	0.7890	2.4564	2.1231	1.1231	2.7985	3.0664	1.0664	3.2447
η	1.5436	0.5436	1.8091	1.4301	0.4301	1.6372	1.5283	0.5283	1.7592
$\alpha(1.5)$	1.4102	0.0898	0.3111	1.4219	0.0781	0.3616	1.4855	0.0145	0.4184
β	1.6061	0.6061	1.2081	2.2448	1.2448	1.6131	2.6871	1.6871	1.7390
ω	0.6491	0.1491	1.6229	1.1208	0.1208	2.2201	1.8607	0.1393	2.3509
η	1.9044	0.9044	2.1914	2.0314	1.0314	2.2866	1.3538	0.3538	1.2591

$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4732	0.0268	0.0763	0.4592	0.0408	0.1042	0.4493	0.0507	0.1438
β	0.9540	0.0460	0.1838	0.9376	0.0624	0.1871	0.9754	0.0246	0.2073
ω	0.7932	0.2932	0.9658	1.5967	0.5967	1.5090	3.0665	1.0665	2.4317
η	1.2020	0.2020	0.5689	1.1081	0.1081	0.3378	1.0411	0.0411	0.2339
$\alpha(1)$	0.9446	0.0554	0.1537	0.9450	0.0550	0.1945	0.9243	0.0757	0.2803
β	0.9742	0.0258	0.3895	1.0080	0.0080	0.4462	1.2138	0.2138	0.8613
ω	0.8048	0.3048	1.0553	1.4568	0.4568	1.4377	2.8402	0.8402	2.4371
η	1.1500	0.1500	0.6059	1.0786	0.0786	0.5921	1.1500	0.1500	0.9042
$\alpha(1.5)$	1.4329	0.0671	0.2216	1.4685	0.0315	0.2597	1.5006	0.0006	0.3485
β	1.3594	0.3594	0.9080	1.8797	0.8797	1.4283	2.2211	1.2211	1.5373
ω	0.6008	0.1008	1.1666	0.9668	0.0332	1.3530	1.8955	0.1045	1.9779
η	1.2423	0.2423	1.0119	1.4270	0.4270	1.3945	1.0634	0.0634	0.5063

Nas Tabelas 23 e 24 apresentamos a média das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$. Vemos resultados semelhantes aos obtidos nas Tabelas 21 e 22 quando ω era negativo. Isto é problemas na estimação nos parâmetros no η e ω para tamanhos de amostra menores que 200.

Tabela 24 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4904	0.0096	0.0483	0.4878	0.0122	0.0641	0.4768	0.0232	0.0987
β	0.9751	0.0249	0.1097	0.9820	0.0180	0.1233	0.9935	0.0065	0.1511
ω	0.6085	0.1085	0.4276	1.1409	0.1409	0.6098	2.3892	0.3892	1.3066
η	1.0848	0.0848	0.2918	1.0377	0.0377	0.2176	1.0100	0.0100	0.1574
$\alpha(1)$	0.9785	0.0215	0.0943	0.9806	0.0194	0.1155	0.9721	0.0279	0.1855
β	0.9798	0.0202	0.2382	0.9959	0.0041	0.2756	1.0744	0.0744	0.3755
ω	0.6133	0.1133	0.4601	1.1446	0.1446	0.6320	2.2892	0.2892	1.3822
η	1.0555	0.0555	0.2469	1.0257	0.0257	0.2525	0.9967	0.0033	0.1490
$\alpha(1.5)$	1.4748	0.0252	0.1331	1.4951	0.0049	0.1760	1.5029	0.0029	0.2412
β	1.1508	0.1508	0.5653	1.4141	0.4141	0.9587	1.6805	0.6805	1.0936
ω	0.5241	0.0241	0.5380	0.9458	0.0542	0.8085	1.8445	0.1555	1.2707
η	1.0623	0.0623	0.3917	1.0845	0.0845	0.5942	0.9744	0.0256	0.1887

$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4956	0.0044	0.028	0.4973	0.0027	0.0377	0.4994	0.0006	0.0560
β	0.9937	0.0063	0.0605	0.9946	0.0054	0.0784	1.0127	0.0127	0.0941
ω	0.5261	0.0261	0.1687	1.0438	0.0438	0.2577	2.0292	0.0292	0.4866
η	1.0257	0.0257	0.1519	1.0173	0.0173	0.1368	0.9896	0.0104	0.0962
$\alpha(1)$	0.9964	0.0036	0.0524	0.9974	0.0026	0.0677	1.0077	0.0077	0.1040
β	1.0092	0.0092	0.1254	1.0180	0.0180	0.1660	1.0774	0.0774	0.2239
ω	0.5066	0.0066	0.1765	1.0116	0.0116	0.2875	1.9620	0.0380	0.5645
η	1.0121	0.0121	0.1377	0.9974	0.0026	0.1143	0.9820	0.0180	0.0850
$\alpha(1.5)$	1.4997	0.0003	0.0794	1.5055	0.0055	0.0998	1.5547	0.0547	0.1369
β	1.0768	0.0768	0.2939	1.1814	0.1814	0.5033	1.4742	0.4742	0.5799
ω	0.4815	0.0185	0.2787	0.9357	0.0643	0.4220	1.6269	0.3731	0.6200
η	0.9866	0.0134	0.1271	0.9925	0.0075	0.2075	0.9541	0.0459	0.0777

ii) Nas próximas tabelas, os estudos de simulação são considerados assumindo que $IG \sim (\eta, \eta^2)$ e os Cenários 1-3.

Nas Tabelas 25 e 26 apresentamos a média das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra, $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$. Vemos como para $\alpha = 1.5$ e ainda para tamanhos grandes da amostra se tiveram problemas nas estimativas dos parâmetros ω e η .

Tabela 25 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4728	0.0272	0.1115	0.4582	0.0418	0.1176	0.5820	0.0820	0.9557
β	1.0667	0.0667	0.1822	1.0489	0.0489	0.1500	1.0007	0.0007	0.1811
ω	-0.9035	0.4035	1.4143	-1.4470	0.4470	1.3854	-2.3820	0.3820	1.7491
η	0.6883	0.0883	0.2110	0.6477	0.0477	0.1525	0.7000	0.1000	0.5691
$\alpha(1)$	0.9364	0.0636	0.2153	1.0293	0.0293	0.9074	2.5603	1.5603	2.9539
β	1.1762	0.1762	0.4929	1.0913	0.0913	0.3890	0.7871	0.2129	0.5150
ω	-0.8889	0.3889	1.1877	-1.3383	0.3383	1.3269	-1.2008	0.7992	2.3780
η	0.6778	0.0778	0.1932	0.6968	0.0968	0.4784	1.4813	0.8813	1.4828
$\alpha(1.5)$	1.4406	0.0594	0.5299	1.9179	0.4179	1.7477	4.3945	2.8945	3.0911
β	1.2929	0.2929	0.8447	1.1160	0.1160	0.7515	0.5409	0.4591	0.6743
ω	-0.8193	0.3193	1.0145	-1.1371	0.1371	1.6286	-0.3066	1.6934	2.3906
η	0.6767	0.0767	0.2918	0.9004	0.3004	0.8200	2.0788	1.4788	1.4307
$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4878	0.0122	0.0648	0.4807	0.0193	0.0781	0.4803	0.0197	0.3593
β	1.0203	0.0203	0.0740	1.0201	0.0201	0.0859	1.0249	0.0249	0.1082
ω	-0.5830	0.0830	0.2638	-1.1513	0.1513	0.5237	-2.4249	0.4249	1.0783
η	0.6365	0.0365	0.1154	0.6226	0.0226	0.0919	0.6271	0.0271	0.2085
$\alpha(1)$	0.9710	0.0290	0.1367	0.9599	0.0401	0.1554	1.9487	0.9487	2.4646
β	1.0409	0.0409	0.1810	1.0534	0.0534	0.1879	0.8900	0.1100	0.4176
ω	-0.5860	0.0860	0.3582	-1.1711	0.1711	0.5170	-1.5979	0.4021	1.9959
η	0.6297	0.0297	0.1174	0.6229	0.0229	0.0924	1.1342	0.5342	1.2288
$\alpha(1.5)$	1.4631	0.0369	0.3066	1.6415	0.1415	1.0863	3.9804	2.4804	2.9710
β	1.0951	0.0951	0.3885	1.0909	0.0909	0.4573	0.6060	0.3940	0.6054
ω	-0.6038	0.1038	0.4233	-1.1109	0.1109	0.9689	-0.4813	1.5187	2.1655
η	0.6238	0.0238	0.1308	0.7118	0.1118	0.4635	1.7388	1.1388	1.3016

Tabela 26 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4965	0.0035	0.0472	0.4916	0.0084	0.0556	0.4831	0.0169	0.0753
β	1.0052	0.0052	0.0450	1.0096	0.0096	0.0536	1.0125	0.0125	0.0666
ω	-0.5215	0.0215	0.1480	-1.0616	0.0616	0.2480	-2.1803	0.1803	0.6281
η	0.6115	0.0115	0.0758	0.6102	0.0102	0.0652	0.6099	0.0099	0.0561
$\alpha(1)$	0.9902	0.0098	0.0960	0.9819	0.0181	0.1073	1.6503	0.6503	2.0769
β	1.0245	0.0245	0.1069	1.0292	0.0292	0.1238	0.9282	0.0718	0.3419
ω	-0.5454	0.0454	0.1777	-1.0768	0.0768	0.3028	-1.7139	0.2861	1.6175
η	0.6165	0.0165	0.0763	0.6117	0.0117	0.0642	0.9635	0.3635	1.0364
$\alpha(1.5)$	1.4849	0.0151	0.1403	1.5126	0.0126	0.5719	3.7665	2.2665	2.8615
β	1.0435	0.0435	0.1837	1.0407	0.0407	0.2434	0.6225	0.3775	0.5455
ω	-0.5438	0.0438	0.1974	-1.0581	0.0581	0.4512	-0.5251	1.4749	2.0211
η	0.6147	0.0147	0.0746	0.6285	0.0285	0.2216	1.6157	1.0157	1.2383
$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4965	0.0035	0.0289	0.4982	0.0018	0.0328	0.4905	0.0095	0.0447
β	1.0043	0.0043	0.0284	1.0028	0.0028	0.0324	1.0067	0.0067	0.0412
ω	-0.5175	0.0175	0.0939	-1.0200	0.0200	0.1443	-2.0762	0.0762	0.3227
η	0.6080	0.0080	0.0486	0.6041	0.0041	0.0410	0.6053	0.0053	0.0342
$\alpha(1)$	0.9941	0.0059	0.0589	0.9945	0.0055	0.0677	1.2390	0.2390	1.3071
β	1.0066	0.0066	0.0595	1.0065	0.0065	0.0693	0.9767	0.0233	0.2124
ω	-0.5111	0.0111	0.0944	-1.0177	0.0177	0.1581	-1.8960	0.1040	0.9975
η	0.6046	0.0046	0.0458	0.6016	0.0016	0.0402	0.7369	0.1369	0.6565
$\alpha(1.5)$	1.4918	0.0082	0.0887	1.4941	0.0059	0.1052	3.5840	2.0840	2.7215
β	1.0103	0.0103	0.1041	1.0085	0.0085	0.1208	0.6358	0.3642	0.5032
ω	-0.5167	0.0167	0.1121	-1.0132	0.0132	0.1828	-0.5706	1.4294	1.8922
η	0.6055	0.0055	0.0473	0.6019	0.0019	0.0394	1.4828	0.8828	1.1403

Tabela 27 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4701	0.0299	0.1066	0.4562	0.0438	0.1210	0.4636	0.0364	0.1406
β	0.9641	0.0359	0.1245	0.9691	0.0309	0.1189	1.0001	0.0001	0.1244
ω	0.8811	0.3811	1.4012	1.4701	0.4701	1.4020	2.4711	0.4711	1.4603
η	0.6871	0.0871	0.2211	0.6524	0.0524	0.1551	0.6286	0.0286	0.1131
$\alpha(1)$	0.9435	0.0565	0.2122	0.9173	0.0827	0.2394	0.9465	0.0535	0.3082
β	0.9463	0.0537	0.2189	0.9650	0.0350	0.2618	1.0496	0.0496	0.3848
ω	0.8522	0.3522	1.2089	1.4390	0.4390	1.3222	2.4746	0.4746	1.6393
η	0.6726	0.0726	0.1783	0.6419	0.0419	0.1589	0.6232	0.0232	0.1637
$\alpha(1.5)$	1.4337	0.0663	0.3266	1.3936	0.1064	0.4010	1.4605	0.0395	0.4368
β	0.9961	0.0039	0.4221	1.0576	0.0576	0.6062	1.2297	0.2297	0.6861
ω	0.7715	0.2715	0.8837	1.4164	0.4164	1.2756	2.2466	0.2466	1.4871
η	0.6662	0.0662	0.2376	0.6540	0.0540	0.2460	0.6199	0.0199	0.1507

$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4870	0.0130	0.0670	0.4781	0.0219	0.0786	0.4720	0.0280	0.1026
β	0.9859	0.0141	0.0704	0.9850	0.0150	0.0784	0.9922	0.0078	0.0895
ω	0.5907	0.0907	0.2769	1.1542	0.1542	0.4910	2.2971	0.2971	0.9278
η	0.6360	0.0360	0.1199	0.6202	0.0202	0.0954	0.6152	0.0152	0.0798
$\alpha(1)$	0.9783	0.0217	0.1380	0.9595	0.0405	0.1599	0.9325	0.0675	0.2015
β	0.9844	0.0156	0.1385	0.9745	0.0255	0.1595	1.0018	0.0018	0.1957
ω	0.5794	0.0794	0.3113	1.1909	0.1909	0.5788	2.3090	0.3090	1.0491
η	0.6259	0.0259	0.1046	0.6160	0.0160	0.0922	0.6140	0.0140	0.0752
$\alpha(1.5)$	1.4652	0.0348	0.2107	1.4377	0.0623	0.2465	1.4295	0.0705	0.3138
β	0.9817	0.0183	0.2349	0.9906	0.0094	0.2729	1.0628	0.0628	0.3667
ω	0.6061	0.1061	0.4468	1.1970	0.1970	0.6837	2.2542	0.2542	1.0862
η	0.6268	0.0268	0.1109	0.6168	0.0168	0.0864	0.6078	0.0078	0.0728

Nas Tabelas 27 e 28 apresentamos a média das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra, $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$. Vemos como, ao contrario o que acontecia nas Tabelas 25 e 26, se tiveram boas estimativas para todos os tamanhos da amostra.

Tabela 28 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 0.6$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4962	0.0038	0.0471	0.4908	0.0092	0.0533	0.4808	0.0192	0.0729
β	0.9956	0.0044	0.0452	0.9930	0.0070	0.0541	0.9969	0.0031	0.0649
ω	0.5263	0.0263	0.1514	1.0627	0.0627	0.2754	2.1488	0.1488	0.6113
η	0.6104	0.0104	0.0754	0.6116	0.0116	0.0662	0.6077	0.0077	0.0519
$\alpha(1)$	0.9909	0.0091	0.0945	0.9850	0.0150	0.1090	0.9640	0.0360	0.1461
β	0.9909	0.0091	0.0944	0.9885	0.0115	0.1126	0.9986	0.0014	0.1419
ω	0.5261	0.0261	0.1592	1.0659	0.0659	0.2793	2.1420	0.1420	0.6388
η	0.6138	0.0138	0.0740	0.6089	0.0089	0.0657	0.6082	0.0082	0.0537
$\alpha(1.5)$	1.4824	0.0176	0.1431	1.4817	0.0183	0.1620	1.4648	0.0352	0.2149
β	0.9881	0.0119	0.1513	1.0134	0.0134	0.1914	1.0461	0.0461	0.2438
ω	0.5409	0.0409	0.1797	1.0461	0.0461	0.3363	2.0799	0.0799	0.6769
η	0.6104	0.0104	0.0754	0.6030	0.0030	0.0609	0.6019	0.0019	0.0503
$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4995	0.0005	0.0295	0.4987	0.0013	0.0337	0.4944	0.0056	0.0447
β	0.9989	0.0011	0.0271	1.0010	0.0010	0.0317	1.0017	0.0017	0.0401
ω	0.5091	0.0091	0.0878	1.0069	0.0069	0.1447	2.0205	0.0205	0.3081
η	0.6043	0.0043	0.0485	0.6024	0.0024	0.0399	0.6023	0.0023	0.0339
$\alpha(1)$	0.9984	0.0016	0.0573	0.9979	0.0021	0.0654	0.9872	0.0128	0.0888
β	1.0027	0.0027	0.0580	1.0040	0.0040	0.0692	1.0058	0.0058	0.0865
ω	0.5041	0.0041	0.0941	1.0039	0.0039	0.1543	2.0242	0.0242	0.3514
η	0.6017	0.0017	0.0465	0.6000	0	0.0378	0.6005	0.0005	0.0329
$\alpha(1.5)$	1.4945	0.0055	0.0880	1.4901	0.0099	0.1014	1.4937	0.0063	0.1286
β	1.0009	0.0009	0.0973	1.0105	0.0105	0.1158	1.0372	0.0372	0.1428
ω	0.5095	0.0095	0.1070	1.0064	0.0064	0.1788	1.9643	0.0357	0.3634
η	0.6029	0.0029	0.0457	0.6010	0.0010	0.0393	0.5999	0.0001	0.0318

Tabela 29 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4620	0.0380	0.1283	0.4331	0.0669	0.1402	0.4092	0.0908	0.1664
β	1.2438	0.2438	0.5174	1.2263	0.2263	0.4237	1.1322	0.1322	0.3317
ω	-1.6764	1.1764	2.9188	-2.8159	1.8159	3.5840	-4.2214	2.2214	3.8878
η	1.2241	0.2241	0.4542	1.1350	0.1350	0.3359	1.0433	0.0433	0.2202
$\alpha(1)$	0.9312	0.0688	0.2939	0.9011	0.0989	0.3676	1.0872	0.0872	0.7026
β	1.5060	0.5060	1.2054	1.4455	0.4455	1.0157	1.0214	0.0214	0.6894
ω	-1.3587	0.8587	2.7112	-2.3998	1.3998	3.2251	-2.9445	0.9445	3.5774
η	1.1916	0.1916	0.5292	1.1553	0.1553	0.5371	1.2827	0.2827	0.7908
$\alpha(1.5)$	1.5446	0.0446	0.5544	1.7031	0.2031	0.7253	2.1704	0.6704	0.9926
β	1.3265	0.3265	1.3958	1.0047	0.0047	1.1650	0.4660	0.5340	0.6485
ω	-0.5852	0.0852	1.8391	-0.8809	0.1191	2.2916	-0.6698	1.3302	2.3680
η	1.3243	0.3243	0.7450	1.4600	0.4600	0.8754	1.7869	0.7869	1.0102

$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4880	0.0120	0.0729	0.4641	0.0359	0.0909	0.4322	0.0678	0.1282
β	1.0955	0.0955	0.2819	1.1261	0.1261	0.3011	1.1100	0.1100	0.2641
ω	-0.8785	0.3785	1.1951	-1.7469	0.7469	1.8767	-3.4152	1.4152	2.8528
η	1.1020	0.1020	0.2983	1.0669	0.0669	0.2208	1.0328	0.0328	0.1498
$\alpha(1)$	0.9675	0.0325	0.1532	0.9221	0.0779	0.2025	0.9238	0.0762	0.3788
β	1.2845	0.2845	0.8464	1.3736	0.3736	0.8202	1.1964	0.1964	0.5816
ω	-0.8941	0.3941	1.3549	-1.8519	0.8519	1.9951	-3.0382	1.0382	2.4665
η	1.0671	0.0671	0.2721	1.0467	0.0467	0.2210	1.0663	0.0663	0.3884
$\alpha(1.5)$	1.5133	0.0133	0.3123	1.5413	0.0413	0.4619	1.9417	0.4417	0.7867
β	1.2492	0.2492	1.1218	1.1493	0.1493	1.0799	0.5777	0.4223	0.6358
ω	-0.5709	0.0709	1.0328	-1.0684	0.0684	1.6278	-0.8890	1.1110	1.9378
η	1.1225	0.1225	0.4303	1.1775	0.1775	0.5446	1.4766	0.4766	0.7800

Nas Tabelas 29 e 30 apresentamos a média das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra, $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$. Podemos observar que para tamanhos pequenos da amostra se obtiveram problemas na estimativa do parâmetro ω . Isto pelo alto valor do RB e do RMSE observado. Para tamanhos da amostra grande ($n \geq 200$) vemos como o parâmetro foi corretamente recuperado.

Tabela 30 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = -0.5, -1, -2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4945	0.0055	0.042	0.4856	0.0144	0.0534	0.4676	0.0324	0.0923
β	1.0371	0.0371	0.1382	1.0523	0.0523	0.1708	1.0462	0.0462	0.1857
ω	-0.6243	0.1243	0.4317	-1.2553	0.2553	0.8984	-2.5576	0.5576	1.5958
η	1.0425	0.0425	0.1756	1.0319	0.0319	0.1460	1.0128	0.0128	0.1092
$\alpha(1)$	0.9812	0.0188	0.0846	0.9657	0.0343	0.1057	0.9394	0.0606	0.2089
β	1.1194	0.1194	0.4451	1.1290	0.1290	0.4444	1.1302	0.1302	0.4475
ω	-0.6557	0.1557	0.5956	-1.2446	0.2446	0.8423	-2.5695	0.5695	1.6416
η	1.0342	0.0342	0.1545	1.0089	0.0089	0.1272	1.0112	0.0112	0.1727
$\alpha(1.5)$	1.4875	0.0125	0.1694	1.4978	0.0022	0.2561	1.8063	0.3063	0.6155
β	1.1690	0.1690	0.8144	1.1265	0.1265	0.8056	0.6507	0.3493	0.5813
ω	-0.5583	0.0583	0.6590	-1.0497	0.0497	1.0051	-1.0680	0.9320	1.6130
η	1.0329	0.0329	0.2247	1.0438	0.0438	0.2811	1.2864	0.2864	0.5868
$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = -0.5$			$\omega = -1$			$\omega = -2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4988	0.0012	0.0247	0.4957	0.0043	0.0276	0.4891	0.0109	0.0498
β	1.0098	0.0098	0.0611	1.0161	0.0161	0.0822	1.0141	0.0141	0.1030
ω	-0.5302	0.0302	0.1723	-1.0705	0.0705	0.2979	-2.1360	0.1360	0.6561
η	1.0106	0.0106	0.0984	1.0103	0.0103	0.0874	1.0039	0.0039	0.0679
$\alpha(1)$	0.9973	0.0027	0.0492	0.9878	0.0122	0.0596	0.9710	0.0290	0.1076
β	1.0251	0.0251	0.1742	1.0417	0.0417	0.2237	1.0768	0.0768	0.2881
ω	-0.5289	0.0289	0.2340	-1.0723	0.0723	0.3874	-2.2451	0.2451	0.8427
η	1.0132	0.0132	0.0986	1.0030	0.0030	0.0811	1.0031	0.0031	0.0632
$\alpha(1.5)$	1.4962	0.0038	0.0787	1.4883	0.0117	0.1112	1.6536	0.1536	0.4368
β	1.0390	0.0390	0.3796	1.0536	0.0536	0.4598	0.8304	0.1696	0.5021
ω	-0.5068	0.0068	0.3202	-1.0200	0.0200	0.5102	-1.4991	0.5009	1.2812
η	1.0034	0.0034	0.0938	0.9966	0.0034	0.1073	1.1219	0.1219	0.3549

Tabela 31 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 50$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4621	0.0379	0.1195	0.4335	0.0665	0.1448	0.4160	0.0840	0.1637
β	0.9372	0.0628	0.3230	0.9103	0.0897	0.3056	0.9822	0.0178	0.2957
ω	1.5621	1.0621	2.8759	2.8375	1.8375	3.6277	4.0770	2.0770	3.9079
η	1.1809	0.1809	0.4091	1.1381	0.1381	0.3373	1.0371	0.0371	0.2434
$\alpha(1)$	0.9318	0.0682	0.2818	0.9023	0.0977	0.3351	0.9828	0.0172	0.5032
β	1.0768	0.0768	0.7859	1.0974	0.0974	0.7707	1.6409	0.6409	1.3549
ω	1.3627	0.8627	2.5956	2.3389	1.3389	3.2756	3.0778	1.0778	3.4991
η	1.1629	0.1629	0.4870	1.1029	0.1029	0.4322	1.1468	0.1468	0.5681
$\alpha(1.5)$	1.5272	0.0272	0.5211	1.5943	0.0943	0.5933	1.5505	0.0505	0.5385
β	1.6667	0.6667	1.3189	2.2147	1.2147	1.6283	2.7037	1.7037	1.7569
ω	0.7686	0.2686	2.0540	1.0822	0.0822	2.1208	1.9026	0.0974	2.4312
η	1.2723	0.2723	0.6815	1.3257	0.3257	0.7026	1.1292	0.1292	0.4651

$n = 100$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4853	0.0147	0.0709	0.4655	0.0345	0.0888	0.4511	0.0489	0.1253
β	0.9495	0.0505	0.1832	0.9433	0.0567	0.1883	0.9849	0.0151	0.2061
ω	0.9123	0.4123	1.2497	1.6823	0.6823	1.8768	3.0374	1.0374	2.5717
η	1.0964	0.0964	0.2833	1.0569	0.0569	0.2110	1.0145	0.0145	0.1472
$\alpha(1)$	0.9731	0.0269	0.1412	0.9282	0.0718	0.1892	0.9289	0.0711	0.3147
β	0.9890	0.0110	0.4091	0.9646	0.0354	0.4433	1.1869	0.1869	0.8386
ω	0.8100	0.3100	1.0883	1.7154	0.7154	1.8345	2.8538	0.8538	2.3361
η	1.0576	0.0576	0.2480	1.0413	0.0413	0.2076	1.0392	0.0392	0.2838
$\alpha(1.5)$	1.4921	0.0079	0.2878	1.5470	0.0470	0.4157	1.4775	0.0225	0.3927
β	1.3897	0.3897	0.9475	1.8891	0.8891	1.4369	2.1817	1.1817	1.5588
ω	0.5530	0.0530	1.1152	0.9317	0.0683	1.4924	1.9606	0.0394	2.0891
η	1.0965	0.0965	0.3937	1.1569	0.1569	0.4855	1.0108	0.0108	0.2283

Nas Tabelas 31 e 32 apresentamos a média das replicas, o RB e RMSE para os diferentes tamanhos de amostra, $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$. Para tamanhos da amostra pequenos se tiveram problemas nas estimativas dos parâmetros β e ω . Estes problemas não são observados para tamanhos de amostra grande.

Tabela 32 – $BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta^2)$: Estimativa dos parâmetros com $\eta = 1$, $\beta = 1$ e $\omega = 0.5, 1, 2$.

$n = 200$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4986	0.0014	0.0414	0.4873	0.0127	0.0489	0.4728	0.0272	0.0912
β	0.9819	0.0181	0.1141	0.9831	0.0169	0.1193	0.9922	0.0078	0.1547
ω	0.6099	0.1099	0.4345	1.1588	0.1588	0.5847	2.4663	0.4663	1.5134
η	1.0418	0.0418	0.1760	1.0148	0.0148	0.1337	1.0082	0.0082	0.1080
$\alpha(1)$	0.9853	0.0147	0.0853	0.9689	0.0311	0.1102	0.9649	0.0351	0.1817
β	0.9786	0.0214	0.2321	0.9887	0.0113	0.2702	1.0958	0.0958	0.4180
ω	0.6263	0.1263	0.5020	1.2219	0.2219	0.8733	2.2783	0.2783	1.4141
η	1.0225	0.0225	0.1500	1.0098	0.0098	0.1225	0.9935	0.0065	0.1277
$\alpha(1.5)$	1.4845	0.0155	0.1628	1.5121	0.0121	0.2558	1.5033	0.0033	0.2393
β	1.1754	0.1754	0.6277	1.4778	0.4778	1.0792	1.7492	0.7492	1.1436
ω	0.5339	0.0339	0.6477	0.9184	0.0816	0.8767	1.7256	0.2744	1.1838
η	1.0259	0.0259	0.2091	1.0447	0.0447	0.2946	0.9775	0.0225	0.1067

$n = 500$									
Parâmetros	$\omega = 0.5$			$\omega = 1$			$\omega = 2$		
	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE	Media	RB	RMSE
$\alpha(0.5)$	0.4994	0.0006	0.0253	0.4962	0.0038	0.0284	0.4981	0.0019	0.0457
β	0.9941	0.0059	0.0575	0.9961	0.0039	0.0764	1.0164	0.0164	0.0896
ω	0.5309	0.0309	0.1747	1.0471	0.0471	0.3033	2.0012	0.0012	0.5017
η	1.0128	0.0128	0.0993	1.0039	0.0039	0.0864	0.9892	0.0108	0.0634
$\alpha(1)$	0.9966	0.0034	0.0486	0.9917	0.0083	0.0558	0.9957	0.0043	0.0945
β	0.9961	0.0039	0.1391	1.0135	0.0135	0.1671	1.0711	0.0711	0.2295
ω	0.5339	0.0339	0.2243	1.0250	0.0250	0.3126	1.9765	0.0235	0.6207
η	1.0088	0.0088	0.0988	0.9960	0.0040	0.0752	0.9860	0.0140	0.0582
$\alpha(1.5)$	1.4873	0.0127	0.0777	1.4998	0.0002	0.1085	1.5279	0.0279	0.1279
β	1.0877	0.0877	0.2927	1.1960	0.1960	0.5279	1.5118	0.5118	0.5980
ω	0.4836	0.0164	0.3460	0.9169	0.0831	0.4329	1.5768	0.4232	0.6471
η	0.9942	0.0058	0.0901	0.9910	0.0090	0.1058	0.9663	0.0337	0.0499

3.2 Aplicação 1

O conjunto de dados utilizado nesta aplicação é considerado por [Nadarajah \(2008\)](#) e [Leiva et al. \(2010\)](#). Estes dados constam das medidas diárias do nível de ozônio da cidade de Nova York, no período de Maio à Setembro de 1973. Os dados correspondentes às medidas são apresentados na Tabela 44, no Anexo A. Na Tabela 33 apresentamos algumas estatísticas de resumo para os dados. Vemos uma grande diferença entre os valores da média e a mediana o qual indica presença de possível assimetria. Esta conclusão é respaldada pela Figura 27 onde se apresenta o histograma deste conjunto de dados. Nesta figura vemos a existência de assimetria e possivelmente de dados atípicos. Portanto a este conjunto de dados poderia ser apropriado ajustar uma distribuição que leve em conta a assimetria e caudas pesadas.

Tabela 33 – Estatística descritiva

Mínimo	Percentil 25	Mediana	Média	Percentil 75	Máximo
1.00	18.00	31.50	42.13	63.25	168.00

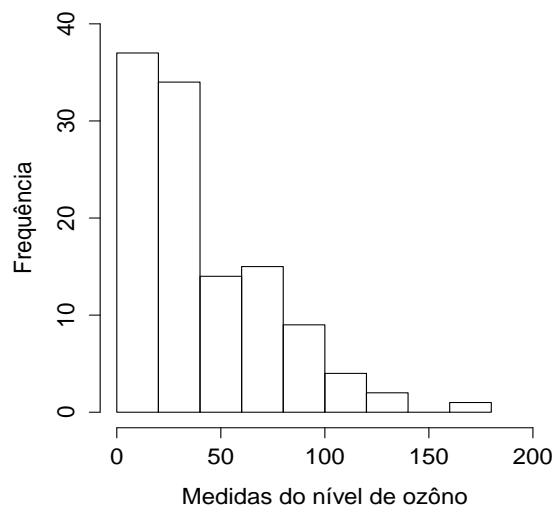


Figura 27 – Histograma da variável nível de ozônio.

Para este conjunto de dados ajustamos os modelos $BS(\alpha, \beta)$, $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$ e $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$. Na Tabela 34 apresentamos as estimativas e os correspondentes erros padrão para estes modelos. Vemos como as estimativas obtidas para os parâmetros α e β são muito próximas nos três modelos. Na Tabela 35 apresentamos os intervalos de confiança assintóticos do 95%.

Na Tabela 36 apresentamos os critérios de informação de Akaike ($AIC : 2\ell(\hat{\theta}) + 2P$), de Schwarz ($SIC : -\ell(\hat{\theta})/n + P \log(n)/2n$) e Bayesiano ($BIC : -\ell(\hat{\theta}) + 0.5 \log(n)P$), em que n é o tamanho da amostra e P é o número de parâmetros estimados, veja [Akaike](#)

Tabela 34 – EMV dos parâmetros e respectivos erros padrão

Modelos	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$
BS(α, β) EP	0.9823 (0.064)	28.0234 (2.263)	- -
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta$) EP	0.9566 (0.0760)	30.4777 (2.6486)	1.6104 (0.4384)
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta^2$) EP	1.1079 (0.1435)	30.5444 (2.6384)	1.3328 (0.2393)

Tabela 35 – Intervalos de Confiança do 95% dos EMV

Modelos	α	β	η
BS(α, β)	(0.9695;0.9945)	(23.5876;32.4584)	-
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta$)	(0.8076;1.1056)	(25.2865;35.6689)	(0.7512;2.4696)
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta^2$)	(0.8266;1.3892)	(25.3732;35.7156)	(0.8638;1.8018)

(1976), Schwarz et al. (1978). Estes critérios selecionam o modelo que melhor ajusta os dados de acordo àquele que tiver menor valor. Desta forma concluímos que os critérios AIC e SIC selecionam os modelos $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta)$ e $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta^2)$ sobre o modelo $BS(\alpha, \beta)$, enquanto o critério BIC seleciona o modelo $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta)$ sobre o modelo $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta^2)$. É importante notar como os valores destes três critérios para os dois modelos BSIG são muito próximos indicando que fornecem ajustes muito similares.

Tabela 36 – Alguns critérios de informação

Modelos	$-\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC	BIC
BS(α, β)	549.0972	9.5016	4.7745	553.8508
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta$)	544.3	9.4362	4.7537	551.4304
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta^2$)	544.3067	9.4363	4.7537	551.437

Nas Figuras 28 29 apresentamos os gráficos de envelope para os três modelos, vemos como os modelos BSIG são os únicos em capturar o dado atípico.

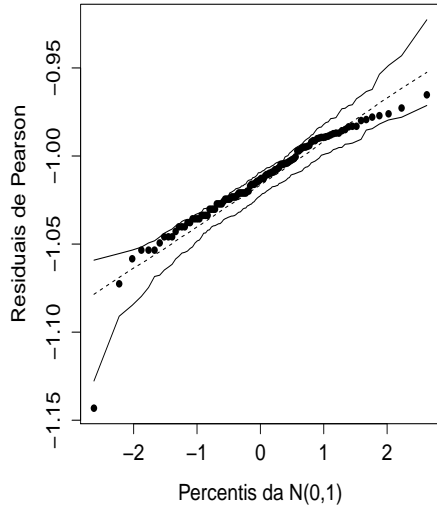
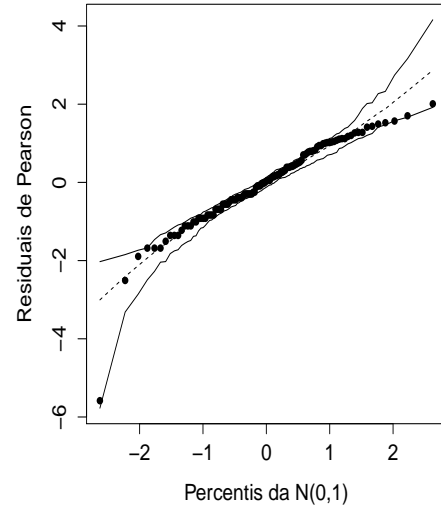
(a) Envelope da distribuição $BS(\alpha, \beta)$ (b) Envelope da distribuição $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$

Figura 28 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG

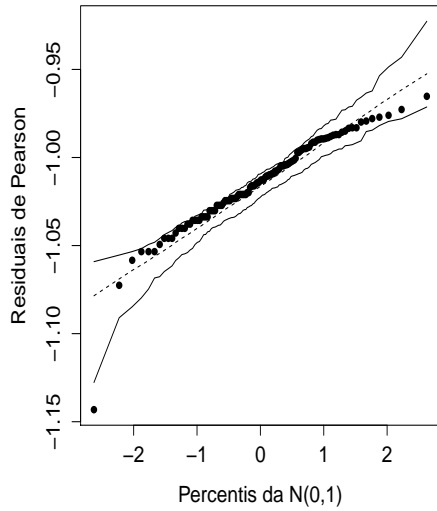
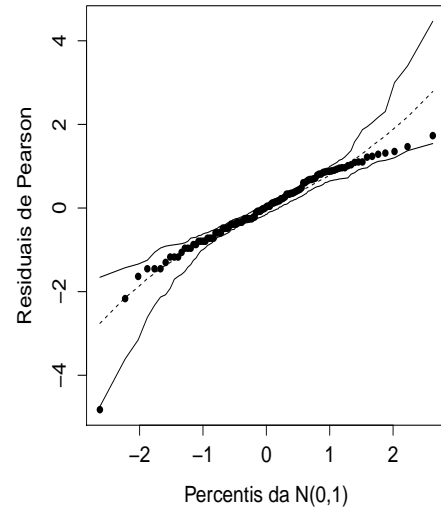
(a) Envelope da distribuição $BS(\alpha, \beta)$ (b) Envelope da distribuição $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$

Figura 29 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.

3.3 Aplicação 2

Os dados correspondentes à aplicação 2 foram analisados por [Birnbaum e Saunders \(1969a\)](#). Estes dados correspondem à vida de fadiga representada por ciclos ($\times 10^{-3}$) até a falha de espécimes de alumínio do tipo 6061 – T6. Estes objetos foram expostos a uma pressão de estresse máximo de 21000 libras por polegada quadrada para 101 objetos. Todos os objetos foram testados até observar falha. Os dados correspondentes às medidas são apresentados na Tabela 45, no Anexo A. Na Tabela 37 apresentamos algumas estatísticas de resumo para este conjunto de dados. Na Figura 30 apresentamos o histograma dos dados e as curvas das funções de densidade estimadas das distribuições $BS(\alpha, \beta)$, $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta^2)$ e $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta)$. Nesta figura vemos um comportamento aproximadamente simétrico dos dados.

Tabela 37 – Estatística descritiva

Mínimo	Percentil 25	Mediana	Média	Percentil 75	Máximo
370	1115	1416	1401	1642	2440

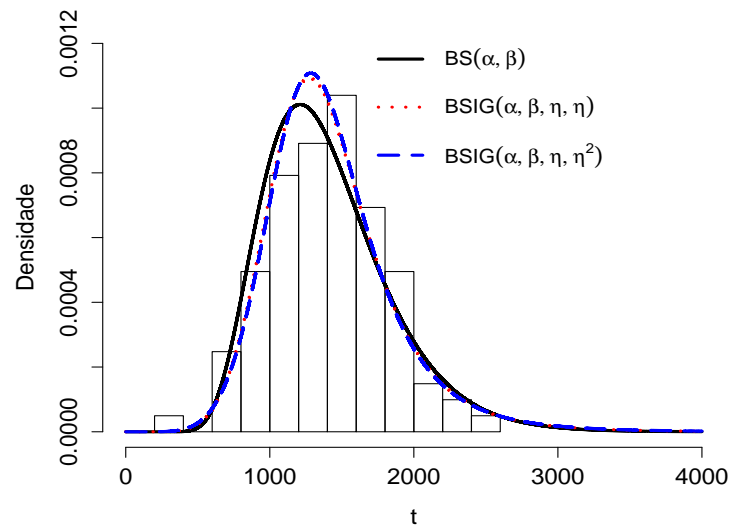


Figura 30 – Histograma dos dados da vida de fadiga.

Para este conjunto de dados foram ajustados duas classes de modelos BS baseados na NIG, simétrico e assimétrico. Os resultados dos ajustes com estes modelos são apresentados a seguir.

3.3.1 Caso simétrico

Na Tabela 38 apresentamos as estimativas dos parâmetros e os erros padrão nos três modelos. Para os três modelos vemos como as estimativas dos parâmetros α e β são muito próximos. Na Tabela 39 apresentamos os intervalos de confiança assintóticos do 95%.

Tabela 38 – EMV dos parâmetros e seus erros padrão

Modelos	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\eta}$
BS(α, β)	0.3101	1336.3766	-
EP	(0.0218)	(40.7426)	-
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta$)	0.3058	1360.5719	1.8333
EP	(0.0252)	(41.7215)	(0.6772)
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta^2$)	0.3602	1364.3254	1.3689
EP	(0.0476)	(41.4059)	(0.3694)

Tabela 39 – Intervalos de Confiança do 95% dos EMV

Modelos	α	β	η
BS(α, β)	(0.2674;0.3529)	(1256.523;1416.231)	-
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta$)	(0.2564;0.3552)	(1278.799;1442.344)	(0.5060;3.1605)
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta^2$)	(0.2669;0.4535)	(1283.171;1445.479)	(0.6449 2.0929)

Na Tabela 40 apresentamos os critérios de informação AIC, SIC e BIC para os três modelos. Vemos como os três critérios concordam em selecionar o modelo $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta)$ como aquele que melhor ajusta o conjunto de dados.

Nas Figuras 31 e 32 apresentamos os envelopes dos dados para os três modelos.

Tabela 40 – Alguns critérios de informação

Modelos	$-\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC	BIC
BS(α, β)	751.3322	14.9175	7.4846	755.9474
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta$)	749.1309	14.8937	7.4857	756.0536
BSIG($\alpha, \beta; \eta, \eta^2$)	749.6867	14.9047	7.4912	756.6094

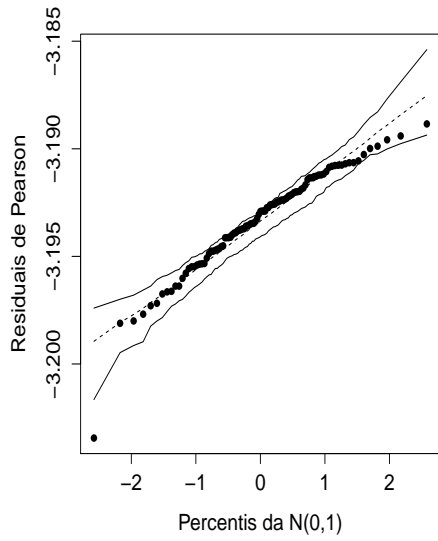
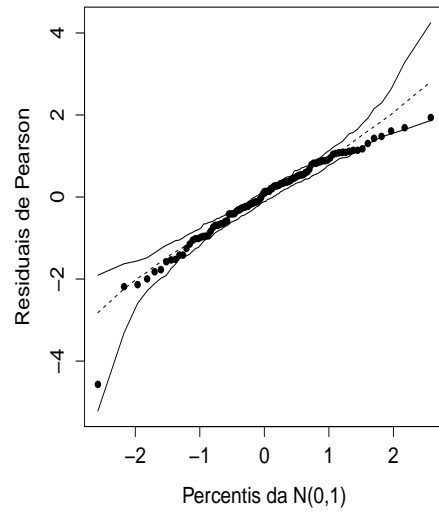
(a) Envelope da distribuição $BS(\alpha, \beta)$ (b) Envelope da distribuição $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta)$

Figura 31 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.

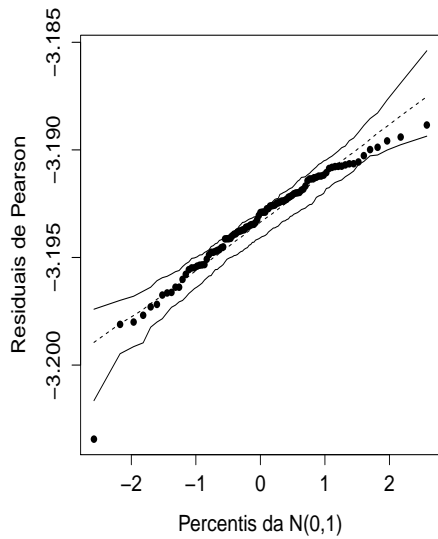
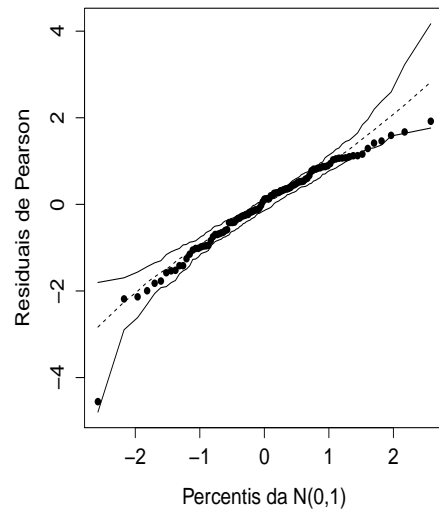
(a) Envelope da distribuição $BS(\alpha, \beta)$ (b) Envelope da distribuição $BSIG(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$

Figura 32 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.

3.3.2 Caso assimétrico

Na Tabela 41 apresentamos as estimativas dos parâmetros e os erros padrão nos três modelos. Para os três modelos vemos como as estimativas dos parâmetros α e β são muito próximas e por sua vez resultados semelhantes aos obtidos no caso simétrico. Na Tabela 39 apresentamos os intervalos de confiança assintóticos do 95%. Na Figura 33 apresentamos o histograma dos dados e as curvas das funções de densidade estimadas

das distribuições $BS(\alpha, \beta)$, $BSIG(\alpha, \beta, \omega, \eta, \eta)$ e $BSIG(\alpha, \beta, \omega, \eta, \eta^2)$. Podemos ver que as curvas de densidade das estimativas dos dois casos da distribuição $BSIG$ são muito próximas.

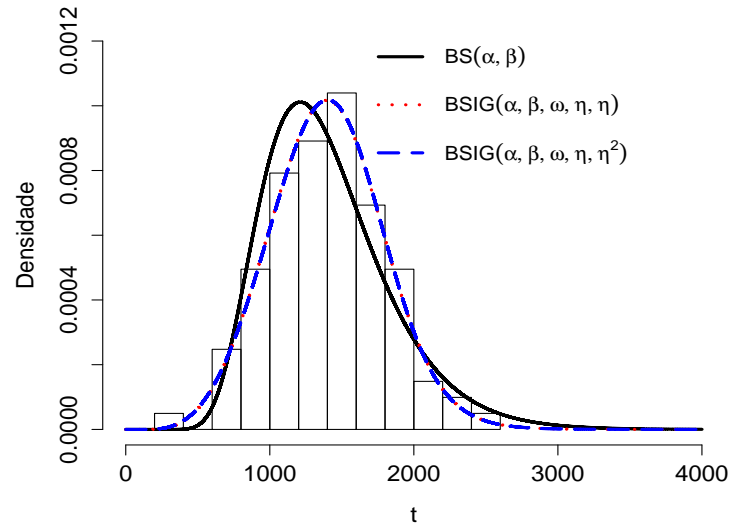


Figura 33 – Histograma dos dados da vida de fadiga.

Tabela 41 – EMV dos parâmetros e seus erros padrões

Modelos	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\omega}$	$\hat{\eta}$
$BS(\alpha, \beta)$ EP	0.3101 (0.0218)	1336.3766 (40.7426)	- -	- -
$BSIG(\alpha, \beta; \omega, \eta, \eta)$ EP	0.2412 (0.0925)	2022.3516 (887.8310)	-1.7320 (2.5455)	1.9957 (1.0779)
$BSIG(\alpha, \beta; \omega\eta, \eta^2)$ EP	0.3029 (0.0727)	1995.6960 (816.5035)	-2.0742 (3.2609)	1.5545 (0.5515)

Tabela 42 – Intervalos de Confiança do 95% dos EMV

Modelos	α	β	ω	η
$BS(\alpha, \beta)$	(0.2674;0.3529)	(1256.523;1416.231)	-	-
$BSIG(\alpha, \beta, \omega; \eta, \eta)$	(0.1274;0.3551)	(949.597;3095.106)	(-4.7525;1.2885)	(0.5371;3.4544)
$BSIG(\alpha, \beta, \omega; \eta, \eta^2)$	(0.1935;0.4122)	(995.8328;2995.5594)	(-5.9870;1.8387)	(0.8122;2.2967)

Na Tabela 43 apresentamos os critérios de informação AIC, SIC e BIC para os três modelos. Vemos como mais uma vez os três critérios concordam em selecionar o modelo $BSIG(\alpha, \beta, \eta, \eta)$ como aquele que melhor ajusta o conjunto de dados.

Nas Figuras 34 e 35 apresentamos os envelopes dos dados para os três modelos.

Tabela 43 – Alguns critérios de informação

Modelos	$-\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC	BIC
$BS(\alpha, \beta)$	751.3322	14.9175	7.4846	755.9474
$BSIG(\alpha, \beta, \omega, \eta, \eta)$	745.7324	14.8402	7.4749	754.9627
$BSIG(\alpha, \beta, \omega, \eta, \eta^2)$	752.6862	14.9839	7.5437	761.9165

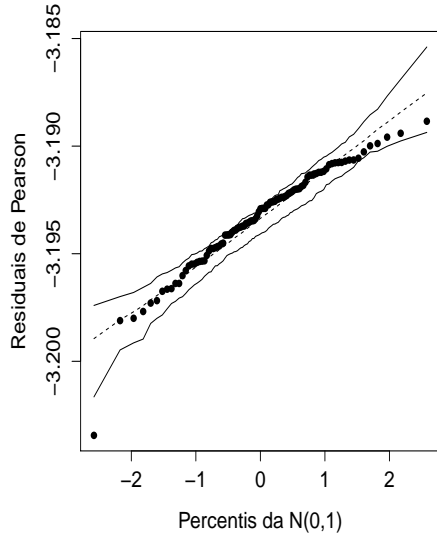
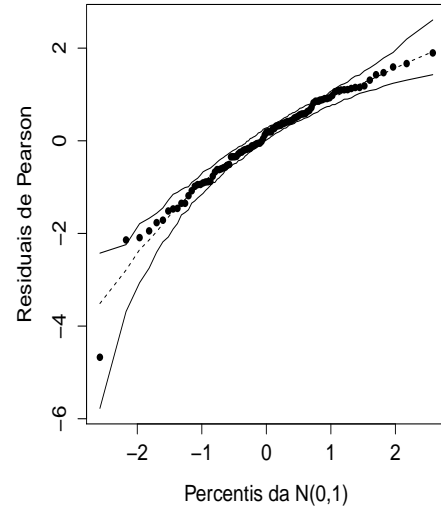
(a) Envelope da distribuição $BS(\alpha, \beta)$ (b) Envelope da distribuição $BSIG(\alpha, \beta, \omega; \eta, \eta)$

Figura 34 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.

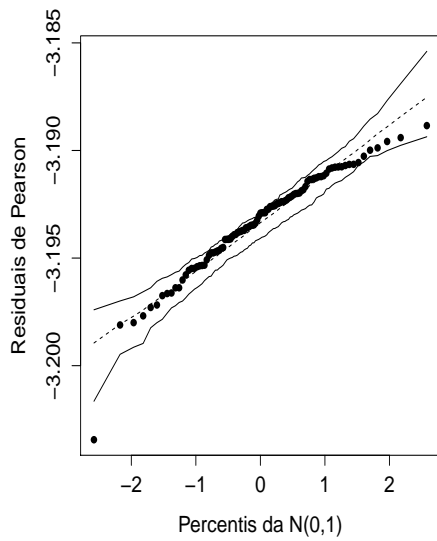
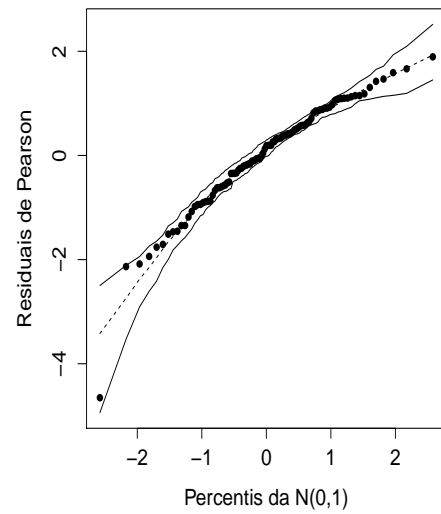
(a) Envelope da distribuição $BSIG(\alpha, \beta)$ (b) Envelope da distribuição $BSIG(\alpha, \beta, \omega; \eta, \eta^2)$

Figura 35 – Envelopes para as distribuições BS e BSIG.

Finalmente, após de ajustar os modelos BS baseados na NIG, com $U \sim IG(\eta, \eta)$ e $U \sim IG(\eta, \eta^2)$, consideramos os resultados nas Tabelas 40 e 43, consideramos que o modelo que ajusta melhor os dados é $BSIG(\alpha, \beta, \omega; \eta, \eta)$ baseado na NIG, visto que o valor da estatística de razão de verossimilhança $Q_{RV} = 2(\ell(\hat{\theta}) - \ell(\tilde{\theta})) = 7.797$ com p-valor igual a 0.005.

4 Considerações Finais

Neste trabalho consideramos a distribuição BS baseada na distribuição NIG, que é uma distribuição assimétrica usualmente usada na área de economia para modelar dados do mercado financeiro. Veja [Barndorff-Nielsen \(1997\)](#). As propriedades leptocúrtica e assimétrica da distribuição NIG são herdadas pela distribuição $BSIG(\alpha, \beta, \omega, \tau)$, como pode ser vista na Figura 14.

Nos estudos de simulação notamos alguns problemas na convergência do algoritmo EM. Assim, adicionamos algumas restrições nos parâmetros da distribuição $IG(\delta, \gamma)$, seguindo as ideias de [Browne e McNicholas \(2015\)](#) e [Chhikara e Folks \(1989b\)](#), que resultou nas condições *i*) $U \sim IG(\eta, \eta)$ e *ii*) $U \sim IG(\eta, \eta^2)$. Os estudos de simulação e aplicações a dados reais foram desenvolvidos considerando $U \sim IG(\eta, \eta)$ e $U \sim IG(\eta, \eta^2)$. Dos resultados obtidos nos estudos de simulação, podemos concluir que o algoritmo EM é eficiente para tamanhos da amostra $n \geq 100$ aproximadamente. Na maioria dos cenários considerados para $n = 50$, notamos que as estimativas dos parâmetros resultaram viesadas, especialmente para o parâmetro η . Devido a complexidade da função de verossimilhança a matriz de informação observada, poderia ser obtida no algoritmo EM segundo a ideia de [Louis \(1982\)](#).

Finalmente, para trabalhos futuros se poderia considerar os modelos de regressão baseados na distribuição BSIG.

Referências

- AKAIKE, H. An information criterion (aic). *Math Sci*, v. 14, n. 153, p. 5–9, 1976.
- BALAKRISHNAN, N.; LEIVA, V.; SANHUEZA, A.; VILCA, L. F. Estimation in the birnbaum-saunders distribution based on scale-mixture of normals and the em-algorithm. *SORT: statistics and operations research transactions*, Institut d'Estadística de Catalunya, v. 33, n. 2, p. 171–192, 2009.
- BARNDORFF-NIELSEN, O. Normal inverse gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scandinavian Journal of Statistics*, Blackwell Publishers Ltd, v. 24, n. 1, p. 1–13, 1997. ISSN 1467-9469.
- _____. *Probability and statistics: self-decomposability, finance and turbulence. Proceeding of the Conference "Probability towards 2000"*, Centre for Applied Probability, Cornell University. [S.l.]: Springer, 1998.
- BARNDORFF-NIELSEN, O.; BLAESILD, P. *Hyperbolic distributions and ramifications: Contributions to theory and application*. [S.l.]: Springer, 1981.
- BARROS, M.; PAULA, G. A.; LEIVA, V. A new class of survival regression models with heavy-tailed errors: robustness and diagnostics. *Lifetime Data Analysis*, Springer, v. 14, n. 3, p. 316–332, 2008.
- BHATTACHARYYA, G. K.; FRIES, A. Fatigue failure models birnbaum-saunders vs. inverse gaussian. *Reliability, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 31, n. 5, p. 439–441, 1982.
- BIRNBAUM, Z. W.; SAUNDERS, S. C. Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of applied probability*, JSTOR, p. 328–347, 1969.
- _____. A new family of life distributions. *Journal of applied probability*, JSTOR, p. 319–327, 1969.
- BROWNE, R. P.; MCNICHOLAS, P. D. A mixture of generalized hyperbolic distributions. *Canadian Journal of Statistics*, Wiley Online Library, v. 43, n. 2, p. 176–198, 2015.
- CANAVOS, G. C. *Applied Probability and Statistical Methods*. [S.l.]: Little, Brown and Company; 1st edition, 1984. v. 1.
- CHANG, D. S.; TANG, L. C. Percentile bounds and tolerance limits for the birnbaum-saunders distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 23, n. 10, p. 2853–2863, 1994.
- CHANG, Y. P.; HUNG, M. C.; LIU, H.; JAN, J. F. Testing symmetry of a nig distribution. *Communications in Statistics—Simulation and Computation®*, Taylor & Francis, v. 34, n. 4, p. 851–862, 2005.
- CHHIKARA, R. S.; FOLKS, J. L. Estimation of the inverse gaussian distribution function. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 69, n. 345, p. 250–254, 1974.

- _____. The inverse gaussian distribution as a lifetime model. *Technometrics*, v. 19, n. 4, p. pp. 461–468, 1977. ISSN 00401706. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1267886>>.
- _____. The inverse gaussian distribution. *New York: Marrei Dekker*, 1989.
- _____. *The inverse gaussian distribution: theory, methodology, and applications*. [S.l.]: Marcel Dekker, Inc., 1989.
- DEMPSTER, A. P.; LAIRD, N. M.; RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the em algorithm. *Journal of the royal statistical society. Series B (methodological)*, JSTOR, p. 1–38, 1977.
- ENGELHARDT, M.; BAIN, L. J.; WRIGHT, F. T. Inferences on the parameters of the birnbaum-saunders fatigue life distribution based on maximum likelihood estimation. *Technometrics*, Taylor & Francis, v. 23, n. 3, p. 251–256, 1981.
- GILBERTO, P.; LEIVA, V.; BARROS, M.; LIU, S. Robust statistical modeling using the birnbaum-saunders-t distribution applied to insurance. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, Wiley Online Library, v. 28, n. 1, p. 16–34, 2012.
- HANSSEN, A.; OIGARD, T. A. The normal inverse gaussian distribution: A versatile model for heavy-tailed stochastic processes. In: *IEEE. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings.(ICASSP'01). 2001 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2001. v. 6, p. 3985–3988.
- JOHNSON, N. L.; KOTZ, S. Distributions in statistics: Continuous univariate distributions 1. *Houghton Mifflin, Boston*, 1970.
- JORGENSEN, B. *Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1982. v. 9.
- KALEMANOVA, A.; SCHMID, B.; WERNER, R. The normal inverse gaussian distribution for synthetic cdo pricing. *The journal of derivatives*, Institutional Investor Journals, v. 14, n. 3, p. 80–94, 2007.
- KARLIS, D. An em type algorithm for maximum likelihood estimation of the normal-inverse gaussian distribution. *Statistics & Probability Letters*, Elsevier, v. 57, n. 1, p. 43–52, 2002.
- KREH, M. Bessel functions. *Lecture notes, Penn State–Göttingen Summer School on Number Theory*, 2012.
- LEIVA, V.; BARROS, M.; PAULA, G.; GALEA, M. Influence diagnostics in log-birnbaum-saunders regression models with censored data. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 51, n. 12, p. 5694 – 5707, 2007. ISSN 0167-9473. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947306003495>>.
- LEIVA, V.; BARROS, M.; PAULA, G.; SANHUEZA, A. Generalized birnbaum-saunders distributions applied to air pollutant concentration. *Environmetrics*, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 235–249, 2008.

- LEIVA, V.; VILCA, F.; BALAKRISHNAN, N.; SANHUEZA, A. A skewed sinh-normal distribution and its properties and application to air pollution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 39, n. 3, p. 426–443, 2010.
- LILLESTOL, J. Risk analysis and the nig distribution. *Journal of Risk*, v. 2, p. 41–56, 2000.
- LOUIS, T. A. Finding the observed information matrix when using the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, [Royal Statistical Society, Wiley], v. 44, n. 2, p. 226–233, 1982.
- MAN, N. R.; SCHAFER, R. E.; SINGPURWALLA, N. Methods for statistical analysis of reliability and life data. *John Wiley, New York*, 1974.
- MEEKER, W. Q.; ESCOBAR, L. A. *Statistical methods for reliability data*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014.
- NADARAJAH, S. A truncated inverted beta distribution with application to air pollution data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, Springer, v. 22, n. 2, p. 285–289, 2008.
- NETO, M. F. dos S. *Estimação e modelagem com a distribuição Birnbaum-Saunders: uma nova reparametrização*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2010.
- NG, H. K. T.; KUNDU, D.; BALAKRISHNAN, N. Modified moment estimation for the two-parameter birnbaum-saunders distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, Elsevier, v. 43, n. 3, p. 283–298, 2003.
- RAMOS, L. M. *Uma Extensão da Distribuição Birnbaum-Saunders Baseada na Distribuição Gaussiana Inversa*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2015.
- RYDBERG, T. *Generalized hyperbolic diffusions with applications towards finance*. [S.l.], 1966a.
- _____. *The normal inverse Gaussian Levy Process: simulation and approximation*. [S.l.], 1966a.
- SAUNDERS, S. C. A family of random variables closed under reciprocation. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 69, n. 346, p. 533–539, 1974.
- SCHRÖDINGER, E. Zur theorie der fall- und steigversuche an teilchen mit brownischer bewegung. *Physikalische Zeitschrift*, v. 16, p. 289–295, 1915.
- SCHWARZ, G. et al. Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 6, n. 2, p. 461–464, 1978.
- SHUSTER, J. On the inverse gaussian distribution function. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis Group, v. 63, n. 324, p. 1514–1516, 1968.
- TWEEDIE, M. C. K. Statistical properties of inverse gaussian distributions. i. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, p. 362–377, 1957.

- TWEEDIE, M. C. K. et al. Statistical properties of inverse gaussian distributions. ii. *The Annals of Mathematical Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 28, n. 3, p. 696–705, 1957.
- VILCA, L. F.; BALAKRISHNAN, N.; ZELLER, C. B. A robust extension of the bivariate birnbaum saunders distribution and associated inference. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 124, p. 418–435, 2014.
- VILCA, L. F.; LEIVA, V. A new fatigue life model based on the family of skew-elliptical distributions. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 35, n. 2, p. 229–244, 2006.
- WALD, A. *Sequential analysis*. [S.l.]: Courier Corporation, 1973.
- WANG, Z.; DESMOND, A. F.; LU, X. Modified censored moment estimation for the two-parameter birnbaum–saunders distribution. *Computational statistics & data analysis*, Elsevier, v. 50, n. 4, p. 1033–1051, 2006.

Apêndices

APÊNDICE A – Derivadas da Matriz de Informação Observada

As seguintes derivadas são usadas nos dois casos da matriz de informação observada, no caso simétrico e no caso assimétrico.

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_{t_i}}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\alpha} a_{t_i}, & \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\alpha} A_{t_i}, \\ \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\alpha} \left(\frac{t_i + \beta}{\beta^{3/2} t_i^{1/2}} \right), & \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \beta} &= \frac{\beta - t_i}{4\alpha \beta^{3/2} t_i^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial^2 \alpha} &= \frac{2}{\alpha^2} a_{t_i}, & \frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial^2 \alpha} &= \frac{2}{\alpha^2} A_{t_i}, \\ \frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \beta}, & \frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial^2 \beta} &= \frac{\beta + 3t_i}{4\alpha \beta^{5/2} t_i^{1/2}}, & \frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial^2 \beta} &= \frac{3t_i - \beta}{8\alpha \beta^{5/2} t_i^{3/2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_1'(\rho) &= -\frac{1}{2} [K_0(\rho) + K_2(\rho)] \\ K_1''(\rho) &= \frac{1}{4} [3K_1(\rho) + K_3(\rho)]\end{aligned}$$

onde ρ representa Λ_i e Δ_{1i} para o caso simétrico e assimétrico da matriz de informação observada respectivamente.

A.0.1 Caso simétrico

$$\Lambda_i = \gamma \sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \alpha} &= \frac{\gamma a_{t_i}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \alpha}, & \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \delta} &= \frac{\gamma \delta}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}}, \\ \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \beta} &= \frac{\gamma a_{t_i}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \beta}, & \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \gamma} &= \sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \eta \partial \psi} = \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} - \frac{\gamma a_{t_i}^2}{(\delta^2 + a_{t_i}^2)^{3/2}} \right) \frac{a_{t_i}}{\partial \eta} \frac{a_{t_i}}{\partial \psi} + \frac{\gamma a_{t_i}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} \frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \eta \partial \psi}$$

com $\eta, \psi = \alpha, \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \eta \partial \delta} &= - \frac{\delta \gamma a_{t_i}}{(\delta^2 + a_{t_i}^2)^{3/2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \eta \partial \gamma} &= \frac{a_{t_i}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

com $\eta = \alpha, \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial^2 \delta} &= \frac{\gamma}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} - \frac{\gamma \delta^2}{(\delta^2 + a_{t_i}^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \delta \partial \gamma} &= \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}}, \\ \frac{\partial^2 \Lambda_i}{\partial \gamma^2} &= 0. \end{aligned}$$

A.0.2 Caso assimétrico

$$\Delta_{1i} = \tau \sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2} \text{ e } \Delta_{2i} = \delta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_{t_i}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} &= a_{t_i} \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \eta}, & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \eta} &= \omega \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \omega} &= \omega \frac{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}, & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \omega} &= a_{t_i}, \\ \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \delta} &= \delta \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}}, & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \delta} &= \gamma, \\ \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \gamma} &= \gamma \frac{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}, & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \gamma} &= \delta, \end{aligned}$$

com $\eta = \alpha, \beta$.

$$\frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \psi} = \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} \left(1 - \frac{a_{t_i}^2}{\delta^2 + a_{t_i}^2} \right) \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \eta} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi} + a_{t_i} \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} \frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \eta \partial \psi},$$

com $\eta \psi = \alpha, \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \omega} &= \frac{\omega a_{t_i}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2} \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \delta} &= -\delta a_{t_i} \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}{(\delta^2 + a_{t_i}^2)^{3/2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \eta \partial \gamma} &= \frac{\gamma a_{t_i}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2} \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

com $\eta = \alpha, \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial^2 \omega} &= \frac{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \left(1 - \frac{\omega^2}{\gamma^2 + \omega^2} \right), & \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \omega \partial \delta} &= \frac{\omega \delta}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2} \sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}}, \\ \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial^2 \delta} &= \frac{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}} \left(1 - \frac{\delta^2}{\delta^2 + a_{t_i}^2} \right) & \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \omega \partial \gamma} &= -\omega \gamma \frac{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}}{(\gamma^2 + \omega^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial^2 \gamma} &= \frac{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \left(1 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \omega^2} \right) & \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \delta \partial \gamma} &= \frac{\delta \gamma}{\sqrt{\delta^2 + a_{t_i}^2} \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \eta \partial \psi} &= \omega \frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \eta \partial \psi}, \eta, \psi = \alpha, \beta, & \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \eta \partial \psi} &= 0, \eta = \alpha, \beta, \psi = \delta, \gamma, \\ \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \eta \partial \omega} &= \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \eta}, \eta = \alpha, \beta, & \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \omega \partial \eta} &= 0, \eta = \omega, \delta, \gamma, \\ \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \delta \partial \gamma} &= 1, & \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial^2 \eta} &= 0, \eta = \delta, \gamma. \end{aligned}$$

A.0.3 Caso $U \sim (\eta, \eta)$

$$\tau = \sqrt{\eta^2 + \omega^2}, \Delta_{1i} = \tau \sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2} \text{ e } \Delta_{2i} = \eta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_{t_i}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} &= a_{t_i} \frac{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi}, & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \psi} &= \omega \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \omega} &= \omega \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}, & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \omega} &= a_{t_i}, \\ \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} &= \eta \left[\frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}} + \frac{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \right], & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \eta} &= 2\eta, \end{aligned}$$

com $\psi = \alpha, \beta$.

$$\frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} = \frac{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \left[\frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \rho} - \frac{a_{t_i}^2}{\eta^2 + a_{t_i}^2} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \rho} + a_{t_i} \frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \psi \partial \rho} \right],$$

com $\psi \rho = \alpha, \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \omega} &= \frac{\omega a_{t_i}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2} \sqrt{\eta^2 + \omega^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \eta} &= \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi} \frac{\eta a_{t_i}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \left[\frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}} - \frac{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \right] \end{aligned}$$

com $\psi = \alpha, \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial^2 \omega} &= \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}} \left[1 - \frac{\omega^2}{\eta^2 + \omega^2} \right], \\ \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \omega \partial \eta} &= \frac{\eta \omega}{\eta^2 + \omega^2} \left[\frac{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} - \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial^2 \eta} &= \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}} + \frac{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \\ &+ \eta^2 \left[\frac{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \left(\frac{1}{\eta^2 + \omega^2} - \frac{1}{\eta^2 + a_{t_i}^2} \right) + \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^2 + \omega^2}} \left(\frac{1}{\eta^2 + a_{t_i}^2} - \frac{1}{\eta^2 - \omega^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \rho} &= \omega \frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \psi \partial \rho}, & \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial^2 \omega} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \omega} &= \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi}, & \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \omega \partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \eta} &= 0, & \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial^2 \eta} &= 2, \end{aligned}$$

com $\psi \rho = \alpha, \beta$.

A.0.4 Caso $U \sim (\eta, \eta^2)$

$$\tau = \sqrt{\eta^4 + \omega^2}, \Delta_{1i} = \tau \sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2} \text{ e } \Delta_{2i} = \eta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_{t_i}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \psi} &= a_{t_i} \frac{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi}, & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \psi} &= \omega \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \omega} &= \omega \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}}, & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \omega} &= a_{t_i}, \\ \frac{\partial \Delta_{1i}}{\partial \eta} &= \eta \left[2\eta^2 \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}} + \frac{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \right], & \frac{\partial \Delta_{2i}}{\partial \eta} &= 3\eta^2, \end{aligned}$$

com $\psi = \alpha, \beta$.

$$\frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \rho} = \frac{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \left[\frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \rho} - \frac{a_{t_i}^2}{\eta^2 + a_{t_i}^2} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \rho} + a_{t_i} \frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \psi \partial \rho} \right]$$

com $\psi \rho = \alpha, \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \omega} &= \frac{\omega a_{t_i}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2} \sqrt{\eta^4 + \omega^2}} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \psi \partial \eta} &= \frac{\eta a_{t_i}}{\eta^2 + a_{t_i}^2} \left[2\eta^2 \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}} - \frac{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \right] \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi}, \end{aligned}$$

com $\psi = \alpha, \beta$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial^2 \omega} &= \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}} \left[1 - \frac{\omega^2}{\eta^4 + \omega^2} \right], \\ \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial \omega \partial \eta} &= \frac{\eta \omega}{\eta^4 + \omega^2} \left[\frac{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} - 2\eta^2 \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta_{1i}}{\partial^2 \eta} &= 2\eta^2 \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}} + \frac{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} + \eta^2 \left[4 \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}} + \frac{2\eta^2}{\eta^4 + \omega^2} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} - 2\eta^2 \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}} \right) + \frac{1}{\eta^2 + a_{t_i}^2} \left(2\eta^2 \frac{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}}{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}} - \frac{\sqrt{\eta^4 + \omega^2}}{\sqrt{\eta^2 + a_{t_i}^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \rho} &= \omega \frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \psi \partial \rho}, & \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial^2 \omega} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \omega} &= \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \psi}, & \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \omega \partial \eta} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial \psi \partial \eta} &= 0, & \frac{\partial^2 \Delta_{2i}}{\partial^2 \eta} &= 6\eta,
\end{aligned}$$

com $\psi \rho = \alpha, \beta$.

Anexos

